

Modelowanie geometryczne

Krzysztof Gdawiec



UNIWERSYTET ŚLĄSKI
INSTYTUT INFORMATYKI

Powierzchnie obrotowe

Niech $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą parametryczną i niech $C(t) = [x(t), y(t)]$. Zdefiniujemy funkcję $P : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ następująco:

$$\forall_{t \in [a, b]} \forall_{\theta \in [c, d]} \quad P(t, \theta) = [x(t), y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta].$$

(Obracamy krzywą zawartą w płaszczyźnie OXY wokół osi OX).

Zbiór $P([a, b] \times [c, d]) \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią obrotową** (ang. surface of revolution) wokół osi OX od kąta c do d .

Krzywą $\gamma(t) = P(t, \theta)$ dla ustalonego θ nazywamy **południkiem** (ang. meridian), zaś krzywą $\eta(\theta) = P(t, \theta)$ dla ustalonego t nazywamy **równoleżnikiem** (ang. parallel).

Jeśli $[c, d] = [0, 2\pi]$, to powierzchnię obrotową nazywamy **pełną**.

Krzywą $\gamma(t) = P(t, \theta)$ dla ustalonego θ nazywamy **południkiem** (ang. meridian), zaś krzywą $\eta(\theta) = P(t, \theta)$ dla ustalonego t nazywamy **równoleżnikiem** (ang. parallel).

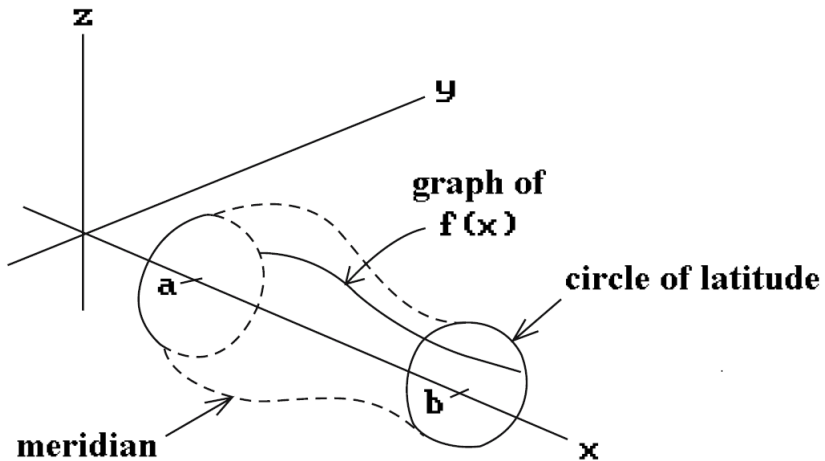
Jeśli $[c, d] = [0, 2\pi]$, to powierzchnię obrotową nazywamy **pełną**.

Zamiast krzywej możemy wziąć dowolną funkcję $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, bo mamy standardową parametryzację:

$$C(t) = (t, f(t)).$$

Wówczas powierzchnia obrotowa dana jest wzorem:

$$P(t, \theta) = [t, f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta].$$



Niektóre problemy z powierzchniami obrotowymi:

- ▶ zdegenerowane przypadki krzywej C : krzywa może mieć przecięcia, krzywa jest przekształceniem stałym tzn. $C(t) = [x, y]$ (powierzchnia staje się okręgiem),
- ▶ krzywa przecina oś OX – wówczas może się zdarzyć, że nie będziemy w stanie wyznaczyć powierzchni stycznej (pochodne cząstkowe się zerują),
- ▶ wybór kierunku dla normala „wychodzącego” – kierunek zależy od orientacji krzywej.

Niektóre problemy z powierzchniami obrotowymi:

- ▶ zdegenerowane przypadki krzywej C : krzywa może mieć przecięcia, krzywa jest przekształceniem stałym tzn. $C(t) = [x, y]$ (powierzchnia staje się okręgiem),
- ▶ krzywa przecina oś OX – wówczas może się zdarzyć, że nie będziemy w stanie wyznaczyć powierzchni stycznej (pochodne cząstkowe się zerują),
- ▶ wybór kierunku dla normala „wychodzącego” – kierunek zależy od orientacji krzywej.

Przykłady powierzchni obrotowych:

- ▶ obrót odcinka równoległego do osi OX daje powierzchnię boczną walca,
- ▶ jeśli odcinek jest pod kątem do osi OX , to dostajemy powierzchnię boczną ściętego stożka.

W 3D obrót o kąt θ wokół osi danej wektorem unormowanym r możemy wyrazić macierzą:

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} r_x^2 + c(1 - r_x^2) & r_x r_y (1 - c) - r_z s & r_x r_z (1 - c) + r_y s \\ r_x r_y (1 - c) + r_z s & r_y^2 + c(1 - r_y^2) & r_y r_z (1 - c) - r_x s \\ r_x r_z (1 - c) - r_y s & r_y r_z (1 - c) + r_x s & r_z^2 + c(1 - r_z^2) \end{bmatrix},$$

gdzie $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$.

Jeśli $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz $C(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, to powierzchnia obrotowa względem osi r ma postać:

$$\forall t \in [a, b] \forall \theta \in [c, d] \quad P(t, \theta) = C(t)T(\theta).$$

Powierzchnie rozwijalne (ang. ruled surfaces)

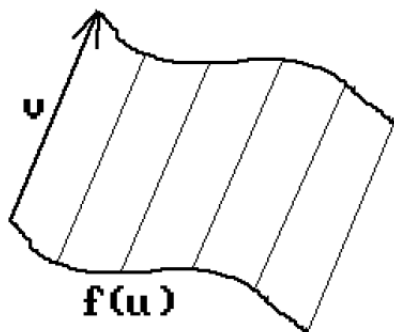
Niech $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą parametryczną oraz $v \in \mathbb{R}^3$ będzie wektorem. Powierzchnię parametryczną $P : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ daną wzorem:

$$\forall_{u \in [a, b]} \forall_{t \in [0, 1]} \quad P(u, t) = C(u) + tv$$

nazywamy **powierzchnią wytłaczaną** (ang. extruded surface).

Pochodne cząstkowe wynoszą:

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, t) = C'(u) \quad \frac{\partial P}{\partial t}(u, t) = v.$$



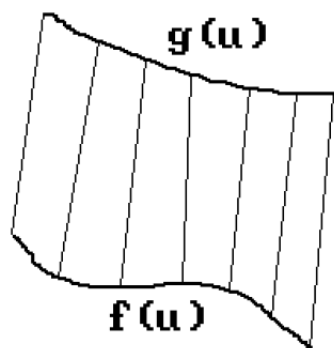
Niech $C_1, C_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą krzywymi parametrycznymi.
Powierzchnię parametryczną $P : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ daną wzorem:

$$\forall_{u \in [a, b]} \forall_{v \in [0, 1]} \quad P(u, v) = (1 - v)C_1(u) + vC_2(u)$$

nazywamy **powierzchnią wyciągniętą** (ang. lofted surface).

Pochodne cząstkowe wynoszą:

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) = (1 - v)C_1'(u) + vC_2'(u) \quad \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) = C_2(u) - C_1(u).$$



Powierzchnie ciągnione (ang. sweep surfaces)

Założmy, że mamy dane:

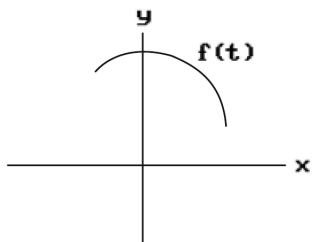
1. krzywą $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$,
2. układ współrzędnych $[u_1(s), u_2(s), u_3(s)]$ w każdym punkcie s wzdłuż krzywej γ , np. trójścian Freneta,
3. krzywą $C : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $C(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, tzw. profil.

Zdefiniujmy $P : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem:

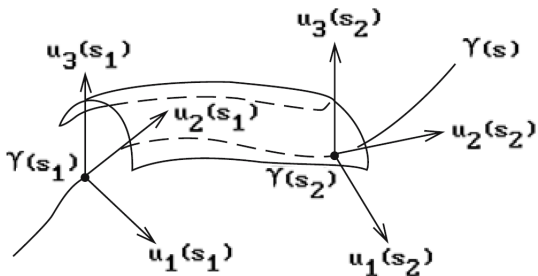
$$P(s, t) = \gamma(s) + x(t)u_1(s) + y(t)u_2(s) + z(t)u_3(s).$$

Powierzchnię parametryczną P nazywamy **powierzchnią ciągnioną** otrzymaną przez ciągnięcie C wzdłuż γ .

Profil



Powierzchnia



Wzór powierzchni ciągniętej można uogólnić dopuszczając jednoparametrową rodzinę przekształceń afinicznych T_s działających na krzywej C kiedy ciągniemy ją wzdłuż γ .

Definiujemy funkcje $g_1, g_2, g_3 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ następująco:

$$[g_1(s, t), g_2(s, t), g_3(s, t)] = T_s(C(t))$$

oraz powierzchnię parametryczną

$$P(s, t) = \gamma(s) + g_1(s, t)u_1(s) + g_2(s, t)u_2(s) + g_3(s, t)u_3(s).$$

Powierzchnię P nazywamy **skręconą powierzchnią ciągniętą**.

Powierzchnie Coonsa

Szukamy powierzchni $P : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, która interpoluje dane cztery krzywe brzegowe: $P(0, v)$, $P(1, v)$, $P(u, 0)$, $P(u, 1)$.

S.A. Coons z MIT w latach 60-tych XX w. podał konstrukcję takiej powierzchni.

Powierzchnie Coonsa

Szukamy powierzchni $P : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, która interpoluje dane cztery krzywe brzegowe: $P(0, v)$, $P(1, v)$, $P(u, 0)$, $P(u, 1)$.

S.A. Coons z MIT w latach 60-tych XX w. podał konstrukcję takiej powierzchni.

Definiujemy operatory

$$P_1(u, v) = (1 - u)P(0, v) + uP(1, v),$$

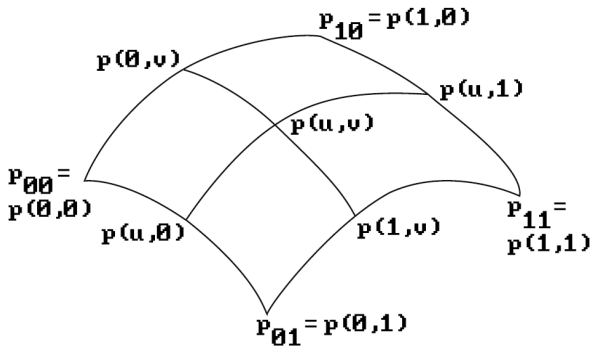
$$P_2(u, v) = (1 - v)P(u, 0) + vP(u, 1).$$

P_1 interpoluje krzywe brzegowe w kierunku u , zaś P_2 w kierunku v .

Definiujemy powierzchnię $P : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ następująco:

$$P(u, v) = P_1(u, v) + P_2(u, v) - ((1 - u)(1 - v)P(0, 0) + (1 - u)vP(0, 1) + u(1 - v)P(1, 0) + uvP(1, 1)).$$

Powierzchnię P nazywamy **liniowym płatem Coonsa**.



Wzór na liniowy płat Coonsa możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned} P(u, v) &= [1 - u, u] \begin{bmatrix} P(0, v) \\ P(1, v) \end{bmatrix} + [1 - v, v] \begin{bmatrix} P(u, 0) \\ P(u, 1) \end{bmatrix} \\ &\quad - [1 - u, u] \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} \\ &= [1 - u, u, 1] \begin{bmatrix} -P(0, 0) & -P(0, 1) & P(0, v) \\ -P(1, 0) & -P(1, 1) & P(1, v) \\ P(u, 0) & P(u, 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Liniowe płyty Coonsa można uogólnić.

Niech $b_0, b_1, c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami takimi, że

$$\begin{aligned}b_0(0) &= 1, b_0(1) = 0, b_1(0) = 0, b_1(1) = 1, \\c_0(0) &= 1, c_0(1) = 0, c_1(0) = 0, c_1(1) = 1.\end{aligned}$$

Definiujemy operatory P_1, P_2 następująco:

$$\begin{aligned}P_1(u, v) &= b_0(u)P(0, v) + b_1(u)P(1, v), \\P_2(u, v) &= c_0(v)P(u, 0) + c_1(v)P(u, 1).\end{aligned}$$

Teraz

$$\begin{aligned} P(u, v) &= P_1(u, v) + P_2(u, v) - (b_0(u)c_0(v)P(0, 0) \\ &\quad + b_0(u)c_1(v)P(0, 1) + b_1(u)c_0(v)P(1, 0) \\ &\quad + b_1(u)c_1(v)P(1, 1)) \\ &= [b_0(u), b_1(u), 1] \begin{bmatrix} -P(0, 0) & -P(0, 1) & P(0, v) \\ -P(1, 0) & -P(1, 1) & P(1, v) \\ P(u, 0) & P(u, 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(v) \\ c_1(v) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Powierzchnię P nazywamy **płatem Coonsa**.

Jeśli $b_0(u) + b_1(u) = 1$ dla $u \in [0, 1]$ lub $c_0(v) + c_1(v) = 1$ dla $v \in [0, 1]$, to powierzchnia P jest niezmiennicza na transformacje afiniczne, tzn. wystarczy poddać transformacji afinicznej krzywe brzegowe.

Jeśli za funkcje b_0, b_1, c_0, c_1 przyjmiemy następujące funkcje:

$$b_0(x) = c_0(x) = (x - 1)^2(2x + 1),$$

$$b_1(x) = c_1(x) = x^2(3 - 2x),$$

to powierzchnię P nazywamy **bikubicznym płatem Coonsa**.

Parametryczne powierzchnie tensorowe

Dla dowolnych przestrzeni wektorowych U, V, W nad ustalonym ciałem K funkcję $B : U \times V \rightarrow W$ nazywamy **odwzorowaniem dwuliniowym** jeśli

1.

$$\forall_{\substack{u_1, u_2 \in U \\ v \in V}} \forall_{a, b \in K} \quad B(au_1 + bu_2, v) = aB(u_1, v) + bB(u_2, v),$$

2.

$$\forall_{\substack{u \in U \\ v_1, v_2 \in V}} \forall_{a, b \in K} \quad B(u, av_1 + bv_2) = aB(u, v_1) + bB(u, v_2).$$

Niech U, V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K oraz $\dim U < \infty, \dim V < \infty$. Parę (T, t) złożoną z przestrzeni liniowej T nad K oraz odwzorowania dwuliniowego $t : U \times V \rightarrow T$ nazywamy **iloczynem tensorowym** przestrzeni U, V jeśli

1. $T = \langle t(U, V) \rangle$ – przestrzeń rozpięta na obrazie t ,
2. $\dim T = \dim U \dim V$.

Oznaczmy $U \otimes V = T$ oraz $u \otimes v = t(u, v)$.

Elementy $u \otimes v$ przestrzeni $U \otimes V$ nazywamy **tensorami prostymi**.

Uwaga:

1. Jeżeli (u_1, \dots, u_n) jest bazą przestrzeni U zaś (v_1, \dots, v_m) bazą V wówczas układ $(u_i \otimes v_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ jest bazą iloczynu tensorowego $U \otimes V$.
2. Jeżeli przestrzenie $U \subset K[X]$ oraz $V \subset K[Y]$ są podprzestrzeniami przestrzeni wielomianów, to $U \otimes V \subset K[X, Y]$ oraz $(f \otimes g)(X, Y) = f(X)g(Y)$.

Parametryczną **powierzchnią tensorową** stopnia (n, m) nazywamy parę (f, S) , gdzie f jest elementem iloczynu tensorowego $(\mathbb{R}[U]_n \otimes \mathbb{R}[V]_m)^3$, zaś $S \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem $[0, 1]^2$ poprzez f .

Parametryczną **powierzchnią tensorową** stopnia (n, m) nazywamy parę (f, S) , gdzie f jest elementem iloczynu tensorowego $(\mathbb{R}[U]_n \otimes \mathbb{R}[V]_m)^3$, zaś $S \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem $[0, 1]^2$ poprzez f .

Założmy, że mamy bazy (a_0, \dots, a_n) przestrzeni $\mathbb{R}[U]_n$ i (b_0, \dots, b_m) przestrzeni $\mathbb{R}[V]_m$. Zatem S możemy zapisać w postaci:

$$S(u, v) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} P_{ij} (a_i \otimes b_j)(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} a_i(u) b_j(v).$$

Punkty $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ nazywamy **punktami kontrolnymi** powierzchni S . Graf o wierzchołkach P_{ij} i krawędziach $\overline{P_{ij}P_{i+1,j}}$, $\overline{P_{ij}P_{i,j+1}}$ nazywamy **siatką kontrolną** powierzchni S .

Niech $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie funkcją, gdzie $\Delta \subsetneq \mathbb{R}^2$ jest obszarem na płaszczyźnie. Parę $(f, f(\Delta))$ nazywamy powierzchnią sklejaną jeśli istnieje taki podział $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ zbioru Δ , że

1. $l_2(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$ dla $i \neq j$ – płyty mogą współdzielić co najwyżej krzywą,
2. obcięcie $(f|_{\Delta_i}, f(\Delta_i))$ jest tensorową powierzchnią parametryczną dla $i = 1, \dots, n$.

Jeżeli reprezentacje krzywych za pomocą baz (a_0, \dots, a_n) , (b_0, \dots, b_m) są niezmiennicze na transformacje afiniczne (mają własność otoczki wypukłej), to reprezentacja powierzchni za pomocą bazy $a_i \otimes b_j$ jest niezmiennicza na transformacje afiniczne (ma własność otoczki wypukłej).

Powierzchnie bikubiczne

Powierzchnie bikubiczne są to powierzchnie tensorowe stopnia $(3, 3)$.

Ponieważ $\dim \mathbb{R}[T]_3 = 4$, więc $\dim \mathbb{R}[U]_3 \otimes \dim \mathbb{R}[V]_3 = 16$.
Zatem pojedynczy płat określony jest za pomocą 16 punktów kontrolnych.

$$\begin{aligned}
S(u, v) &= \sum_{j=0}^3 \left(\sum_{i=0}^3 P_{ij} a_i(u) \right) b_j(v) = \sum_{j=0}^3 \left([P_{0j} P_{1j} P_{2j} P_{3j}] M_a \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \right) b_j(v) \\
&= \sum_{j=0}^3 \left([P_{0j}, P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}] M_a \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T b_j(v) \\
&= \sum_{j=0}^3 [u^3, u^2, u, 1] M_a^T \begin{bmatrix} P_{0j} \\ P_{1j} \\ P_{2j} \\ P_{3j} \end{bmatrix} b_j(v)
\end{aligned}$$

$$= [u^3, u^2, u, 1]M_a^T \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \end{bmatrix} b_0(v) + \dots + [u^3, u^2, u, 1]M_a^T \begin{bmatrix} P_{03} \\ P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} b_3(v)$$

$$= [u^3, u^2, u, 1]M_a^T \left(\begin{bmatrix} P_{00} \\ \vdots \\ P_{30} \end{bmatrix} b_0(v) + \dots + \begin{bmatrix} P_{03} \\ \vdots \\ P_{33} \end{bmatrix} b_3(v) \right)$$

$$= [u^3, u^2, u, 1]M_a^T \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{03} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{30} & \dots & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0(v) \\ \vdots \\ b_3(v) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [u^3, u^2, u, 1] M_a^T \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{03} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{30} & \dots & P_{33} \end{bmatrix} M_b \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [u^3, u^2, u, 1] M_a^T \cdot P \cdot M_b \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

M_a jest macierzą przejścia od bazy (a_0, a_1, a_2, a_3) do bazy kanonicznej, zaś M_b jest macierzą przejścia od bazy (b_0, b_1, b_2, b_3) do bazy kanonicznej.

Zamiana reprezentacji w bazach (a_0, \dots, a_3) , (b_0, \dots, b_3) do reprezentacji w bazach (c_0, \dots, c_3) , (d_0, \dots, d_3) :

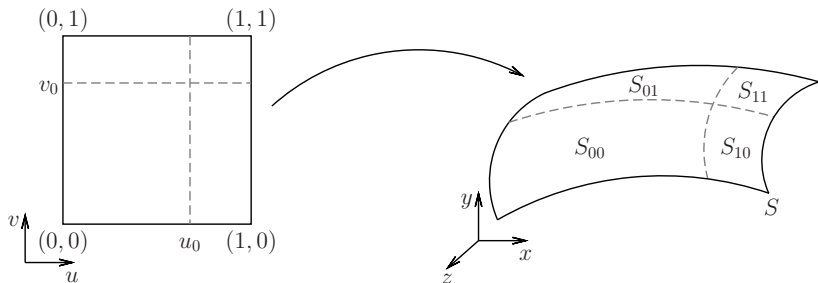
$$\begin{aligned}
 S(u, v) &= [u^3, u^2, u, 1] M_a^T \cdot P \cdot M_b \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [u^3, u^2, u, 1] M_c^T (M_c^{-1})^T M_a^T \cdot P \cdot M_b \cdot M_d^{-1} \cdot M_d \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [u^3, u^2, u, 1] M_c^T (M_a \cdot M_c^{-1})^T \cdot P \cdot (M_b \cdot M_d^{-1}) M_d \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $Q = (M_a \cdot M_c^{-1})^T \cdot P \cdot (M_b \cdot M_d^{-1})$. Wówczas

$$S(u, v) = [u^3, u^2, u, 1] M_c^T \cdot Q \cdot M_d \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podział płata na cztery płaty

Mamy płat $S : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz wartości $u_0, v_0 \in [0, 1]$. Chcemy podzielić płat S na cztery płaty: $S_{00} = S|_{[0, u_0] \times [0, v_0]}$,
 $S_{01} = S|_{[0, u_0] \times [v_0, 1]}$, $S_{10} = S|_{[u_0, 1] \times [0, v_0]}$, $S_{11} = S|_{[u_0, 1] \times [v_0, 1]}$.



Przeprowadzając podobne obliczenia jak w przypadku krzywych otrzymujemy punkty kontrolne poszczególnych płatów:

$$\begin{aligned} S_{00} &\rightarrow (L_a(u_0))^T \cdot P \cdot L_b(v_0), & S_{10} &\rightarrow (R_a(u_0))^T \cdot P \cdot L_b(v_0), \\ S_{01} &\rightarrow (L_a(u_0))^T \cdot P \cdot R_b(v_0), & S_{11} &\rightarrow (R_a(u_0))^T \cdot P \cdot R_b(v_0), \end{aligned}$$

gdzie macierze $L.(t)$ i $R.(t)$ mają tę samą postać jak w przypadku podziału krzywej kubicznej, a symbol w indeksie dolnym oznacza, której macierzy przejścia użyć.

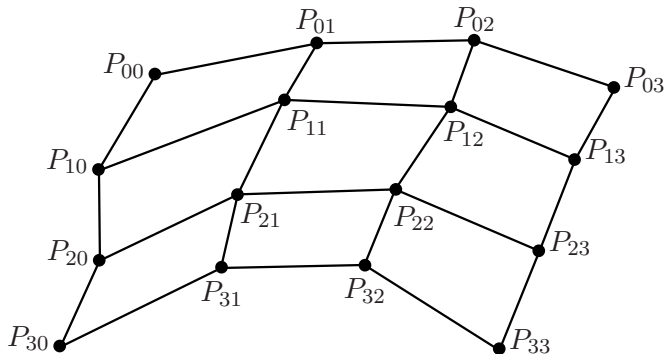
Bikubiczne powierzchnie Béziera (płaty Béziera)

Podobnie jak w przypadku krzywych Béziera jako wielomiany bazowe bierzemy wielomiany Bernsteina. Zatem płat $S : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dany jest wzorem:

$$\forall_{u,v \in [0,1]} \quad S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

gdzie B_k^p jest k -tym wielomianem Bernsteina stopnia p .

Punkty kontrolne i siatka kontrolna płata Béziera



Ustalmy $u = 0$. Wówczas

$$S(0, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i^3(0) B_j^3(v).$$

Ponieważ $B_0^3(0) = 1$ oraz $B_i^3(0) = 0$ dla $i \neq 0$, więc

$$S(0, v) = \sum_{j=0}^3 P_{0j} B_j^3(v).$$

Zatem otrzymujemy krzywą Béziera.

Podobne obliczenia możemy zrobić dla $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$.

Zatem krawędziami płata Béziera są krzywe Béziera.

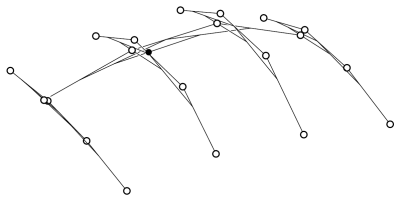
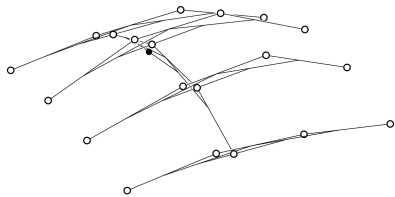
Z tego wynika również, że płat interpoluje narożne punkty kontrolne, tzn. $S(0,0) = P_{00}$, $S(0,1) = P_{03}$, $S(1,0) = P_{30}$, $S(1,1) = P_{33}$.

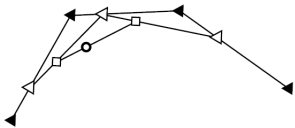
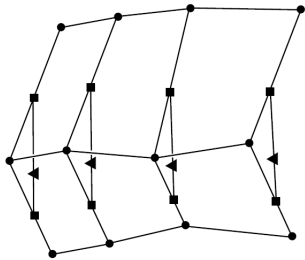
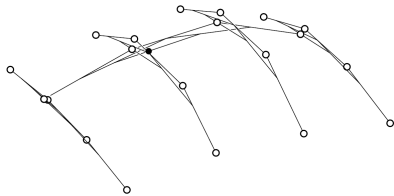
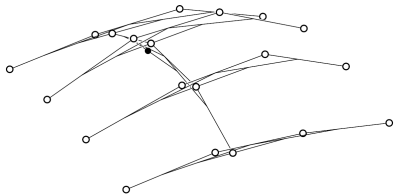
Wyznaczanie punktu na płacie:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v) = \sum_{i=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 P_{ij} B_j^3(v) \right) B_i^3(u) \\ &= \sum_{i=0}^3 Q_i B_i^3(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v) = \sum_{j=0}^3 \left(\sum_{i=0}^3 P_{ij} B_i^3(u) \right) B_j^3(v) \\ &= \sum_{j=0}^3 Q_j B_j^3(v). \end{aligned}$$

Czyli wszystko sprowadza się do wyznaczenia punktów na krzywych. Do tego celu możemy użyć wzoru lub algorytmu de Casteljau.





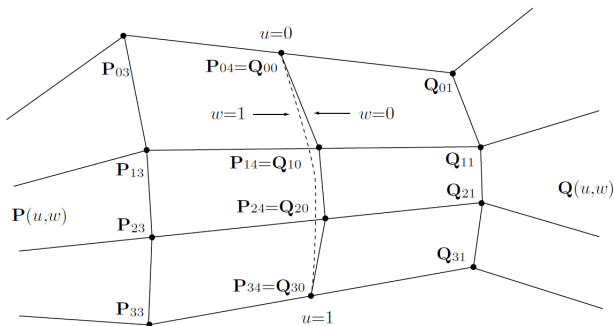
Podwyższanie stopnia płata (dowolnego stopnia)

Aby podwyższyć stopień ze względu na zmienną u (czyli reprezentację w bazie $B_i^{n+1}(u)B_j^m(v)$) wystarczy zastosować procedurę podwyższania stopnia do wszystkich wierszy siatki kontrolnej.

Analogicznie wygląda podwyższanie stopnia ze względu na zmienną v , tzn. operujemy na kolumnach siatki kontrolnej.

Łączenie płatów Béziera

Jest to uogólnienie łączenia krzywych. Łączenie C^0 sprowadza się do tego żeby w miejscu łączenia (wiersz lub kolumna siatki) punkty ostatniego wiersza (lub kolumny) były równe punktom pierwszego wiersza (lub kolumny) drugiego płata. W przypadku C^1 połączenie musi być C^0 oraz odpowiednie wektory muszą być sobie równe.



Płaty wymierne

Podobnie jak w przypadku krzywych możemy wprowadzić płaty wymierne. Płat taki dany jest wzorem:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} P_{ij} a_i(u) b_j(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} a_i(u) b_j(v)},$$

gdzie $w_{ij} \in \mathbb{R}$ są to wagi, $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ są to punkty kontrolne, a a_i, b_j wielomiany bazowe dla $i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, m\}$.

Jeśli jako wielomiany bazowe weźmiemy wielomiany Bernsteina, to otrzymujemy wymierny płat Béziara, zaś jeśli weźmiemy funkcje bazowe N_i^p , to otrzymamy powierzchnie NURBS.

Współrzędne barycentryczne

Założmy, że mamy punkty P_0, \dots, P_n i rozważmy zbiór ich kombinacji afinicznych:

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n,$$

gdzie $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$.

Zbiór ten tworzy przestrzeń afiniczną, a współrzędne $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **współrzędnymi barycentrycznymi**.

W grafice komputerowej najczęściej korzysta się ze współrzędnych barycentrycznych względem trzech punktów (wierzchołków trójkąta). Zatem mamy punkty P_0 , P_1 , P_2 , a każdy punkt należący do płaszczyzny wyznaczonej przez te punkty możemy przedstawić w postaci:

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2,$$

gdzie $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Jeśli $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, to punkt P leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 .

Jeśli któreś $\alpha = 0$, to punkt P leży na odcinku łączącym punkty o niezerowych wartościach α .

Jeśli któreś $\alpha \notin [0, 1]$, to punkt P leży poza trójkątem o wierzchołkach P_0, P_1, P_2 .

Jak wyznaczyć współrzędne barycentryczne mając współrzędne kartezjańskie?

Jak wyznaczyć współrzędne barycentryczne mając współrzędne kartezjańskie?

Niech $P_0 = [x_0, y_0]$, $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ oraz $P = [x, y]$.
Wówczas współrzędne barycentryczne $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ spełniają równość:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zatem aby wyznaczyć współrzędne barycentryczne należy rozwiązać powyższy układ równań, gdzie niewiadomymi są α_0 , α_1 , α_2 .

Ponieważ współrzędne barycentryczne względem wierzchołków trójkąta są szeroko stosowane w grafice komputerowej istnieją gotowe algorytmy do ich wyznaczania.

Trójkątne płaty Béziera

Płaty te wprowadzone zostały w 1959 r. przez Paula de Casteljaou.

Trójkątne płaty Béziera

Płaty te wprowadzone zostały w 1959 r. przez Paula de Casteljaou.

Wielomianem Bernsteina stopnia n trzech zmiennych nazywamy wielomian:

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

gdzie $i, j, k \geq 0$ oraz $i + j + k = n$.

Ponadto przyjmujemy, że $B_{ijk}^n(u, v, w) = 0$ dla $i < 0, j < 0, k < 0$ lub $i + j + k \neq n$.

Zmienne u , v , w (z warunkiem $u + v + w = 1$) możemy przyjąć za współrzędne barycentryczne punktu na płaszczyźnie, w układzie odniesienia punktów $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$.

Trójkąt ten przyjmowany jest za dziedzinę płata trójkątnego.

Zamiast trzech parametrów u , v , w możemy wprowadzić dwa parametry s , t następująco:

$$u = s, \quad v = t, \quad w = 1 - s - t.$$

Podójście z dwoma parametrami stosuje się w implementacji.

Trójkątny płat Béziera stopnia n określony jest wzorem:

$$P(u, v, w) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w),$$

gdzie $P_{ijk} \in \mathbb{R}^3$ nazywamy punktami kontrolnymi.

Dla stopnia n liczba punktów kontrolnych wynosi $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Rozmieszczenie punktów kontrolnych dla różnych stopni trójkątnego płata Béziera.

$n = 1$

P_{001} P_{010} P_{100}

$n = 2$

P_{002} P_{011} P_{020} P_{101} P_{110} P_{200}

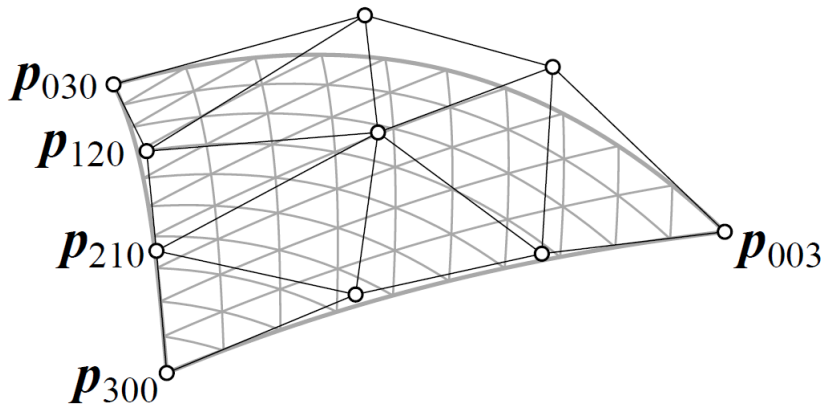
$n = 3$

P_{003} P_{012} P_{021} P_{030} P_{102} P_{111} P_{120} P_{201} P_{210} P_{300}

$n = 4$

P_{004} P_{013} P_{022} P_{031} P_{040} P_{103} P_{112} P_{121} P_{130} P_{202} P_{211} P_{220} P_{301} P_{310} P_{400}

Trójkątny płat Béziera stopnia 3.



Jeśli ustalimy $u = 0$, to

$$P(0, v, w) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B_{ijk}^n(0, v, w) = \sum_{\substack{j, k \geq 0 \\ j+k=n}} P_{0jk} \frac{n!}{j!k!} v^j w^k,$$

gdzie $v + w = 1$.

Zatem

$$\begin{aligned} P(v) &= \sum_{\substack{j, k \geq 0 \\ j+k=n}} P_{0jk} \frac{n!}{j!k!} v^j (1-v)^k = \sum_{j=0}^n P_{0j, n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} v^j (1-v)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n P_{0j, n-j} B_j^n(v). \end{aligned}$$

Czyli dostajemy krzywą Béziera. Podobne obliczenia możemy przeprowadzić dla $v = 0$ i $w = 0$.

Algorytm de Casteljau

Można pokazać, że prawdziwa jest zależność:

$$B_{ijk}^0 = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j = k = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = uB_{i-1,jk}^{n-1}(u, v, w) + vB_{i,j-1,k}^{n-1}(u, v, w) + wB_{ij,k-1}^{n-1}(u, v, w),$$

gdzie $i, j, k \geq 0$, $i + j + k = n$ oraz $n > 0$.

Zależność ta jest podstawą algorytmu de Casteljau dla trójkątnych płatów Béziera.

Algorytm 1: Algorytm de Casteljau dla trójkątnych płatów Béziera

Dane: P_{ijk}^0 dla $i, j, k \geq 0$, $i + j + k = n$ oraz (u_0, v_0, w_0) .

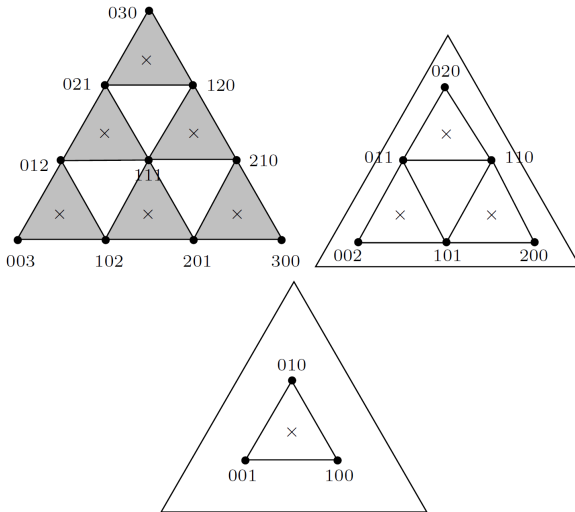
Wynik: punkt na płacie, tzn. $P(u_0, v_0, w_0)$.

for $h = 1, \dots, n$ **do**

for $i, j, k \geq 0$, $i + j + k = n - h$ **do**
 $P_{ijk}^h = u_0 P_{i+1, j, k}^{h-1} + v_0 P_{i, j+1, k}^{h-1} + w_0 P_{i, j, k+1}^{h-1}$

return $P(u_0, v_0, w_0) = P_{000}^n$

Algorytm de Casteljau dla trójkątnego płata Béziera stopnia 3.



Podwyższanie stopnia

Mamy płat stopnia n dany za pomocą $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ punktów kontrolnych P_{ijk} . Szukamy punktów kontrolnych Q_{ijk} , które reprezentują tę samą powierzchnię, ale stopnia $n+1$, tzn.

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n+1}} Q_{ijk} B_{ijk}^{n+1}(u, v, w).$$

Stosując podobne obliczenia jak dla krzywych można pokazać, że

$$Q_{ijk} = \frac{1}{n+1} [iP_{i-1,j,k} + jP_{i,j-1,k} + kP_{i,j,k-1}].$$

Łączenie płatów

Aby połączyć dwa płaty trójkątne z regularnością C^0 wystarczy, że punkty kontrolne wzdłuż łączenia będą sobie równe.

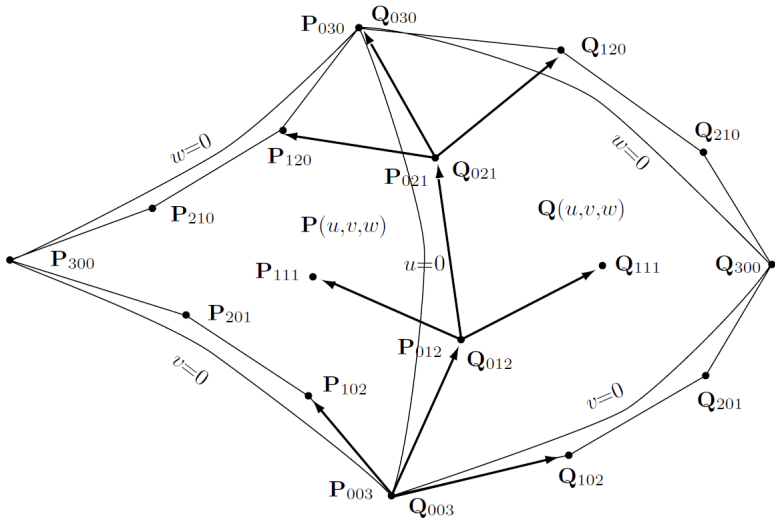
Łączenie z regularnością C^1 pokażemy tylko dla $n = 3$. Przy oznaczeniach z rysunku z kolejnego slajdu muszą być spełnione warunki:

$$P_{012} - P_{003} = \alpha(P_{102} - P_{003}) + \beta(Q_{102} - Q_{003}),$$

$$P_{021} - P_{012} = \alpha(P_{111} - P_{012}) + \beta(Q_{111} - Q_{012}),$$

$$P_{030} - P_{021} = \alpha(P_{120} - P_{021}) + \beta(Q_{120} - Q_{021}).$$

Czyli odpowiednie wektory muszą leżeć na jednej płaszczyźnie.



Pochodne pŁata

Niech

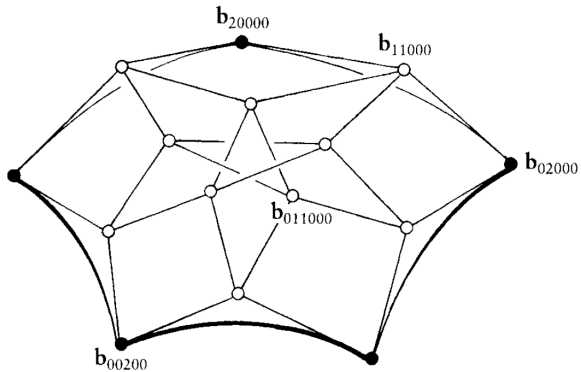
$$P(u, v) = P(u, v, 1 - u - v),$$
$$B_{ijk}^n(u, v) = B_{ijk}^n(u, v, 1 - u - w).$$

Wówczas

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n-1}} B_{ijk}^{n-1}(u, v) P_{i+1, j, k},$$
$$\frac{\partial P}{\partial v}(u, v) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n-1}} B_{ijk}^{n-1}(u, v) P_{i, j+1, k}.$$

Płaty trójkątne można uogólnić na dowolny wielokąt. Płaty takie nazywamy S -płatami (ang. S -patch).

Przykład S -płatą dla $S = 4$ i $n = 2$.



Powierzchnie subdivision

Powierzchnie subdivision są przeniesieniem pomysłu krzywych subdivision na powierzchnie. Powierzchnia dana jest poprzez zgrubną siatkę (siatkę kontrolną) oraz reguły, które wykonujemy rekurencyjnie na siatce kontrolnej.

Wykonując kolejne iteracje siatka kontrolna ulega wygładzeniu. Przechodząc z procesem wygładzania do nieskończoności otrzymujemy gładką powierzchnię.

Reguły dla powierzchni najczęściej podawane są w formie masek.

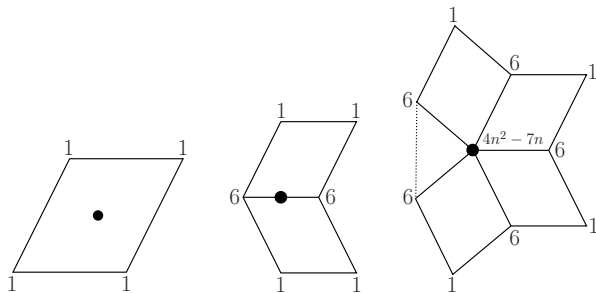
Powierzchnie subdivision stały się podstawowym rodzajem powierzchni stosowanym przez studio Pixar. Pixar udostępnił nawet specjalną bibliotekę do obsługi powierzchni subdivision:

<http://graphics.pixar.com/opensubdiv/docs/intro.html>

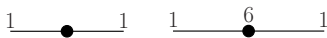
Powierzchnia Catmulla-Clarka

Powierzchnia Catmulla-Clarka przedstawiona została w 1978 roku. Bazuje ona na iloczynie tensorowym kubicznych bsplainów i jest dana za pomocą siatki kontrolnej złożonej z czworokątów. Za pomocą tego schematu otrzymujemy powierzchnię, która jest klasy C^2 wszędzie za wyjątkiem wierzchołków wyjątkowych (tzn. takich których walencyjność jest różna od 4), gdzie jest tylko klasy C^1 .

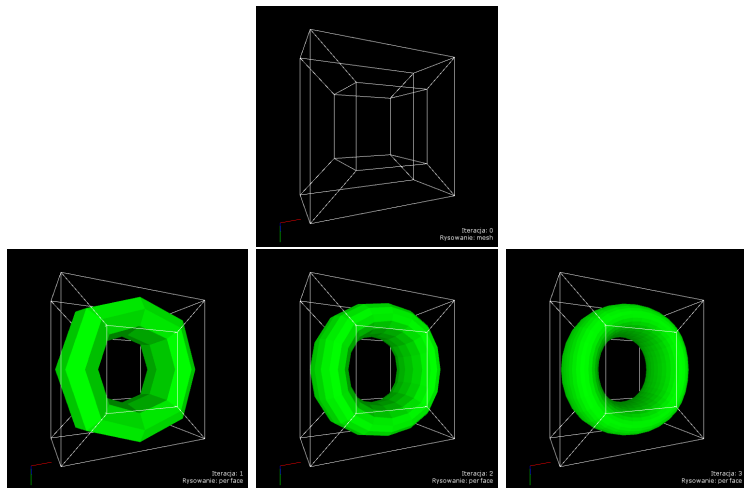
Maski definiujące reguły do powierzchni Catmulla-Clarka



Maski używane dla wierzchołków przy brzegu



Dla każdej z masek współczynniki w masce podzielone są przez sumę współczynników (współczynniki muszą sumować się do 1).



Siatka kontrolna (góra) i trzy pierwsze iteracje (dół).

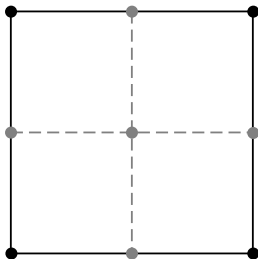
W przypadku powierzchni Catmulla-Clarka zamiast używać masek możemy zastosować nieco inne podejście, które zostało zaproponowane w:

Warren, J., Schaefer, S.: A Factored Approach to Subdivision Surfaces. IEEE Computer Graphics and Applications 24(3), 74–81, (2004)

Pojedynczą iterację dzielimy na następujące etapy:

1. etap liniowy (ang. linear stage),
2. etap uśredniania (ang. averaging stage),
3. korekcja.

W etapie liniowym dla każdej ścianki wyznaczmy środki krawędzi oraz środek ścianki. Następnie tworzymy nowe ścianki następująco (na czarno oznaczono wierzchołki oryginalnej siatki, a kolorem szarym nowe wierzchołki):



W etapie uśredniania modyfikujemy jedynie wierzchołki.

Na początku inicjalizujemy nowe pozycje wierzchołków przez $(0, 0, 0)$. Następnie dla każdej ścianki (po etapie liniowym) obliczamy jej środek i dodajemy go do pozycji każdego wierzchołka tworzącego rozważaną ściankę. Po przejściu wszystkich ścianek dzielimy każdy wierzchołek przez jego walencyjność. Walencyjność wierzchołków możemy obliczyć równocześnie z obliczaniem środków ścianek.

Korekcja ma na celu zmniejszenie nieciągłości powierzchni i polega na zmianie pozycji wierzchołków siatki. Niech \hat{p}_i oznacza wierzchołek po etapie liniowym, p_i wierzchołek po etapie uśredniania. Zmieniamy pozycję wierzchołka zgodnie z następującym wzorem:

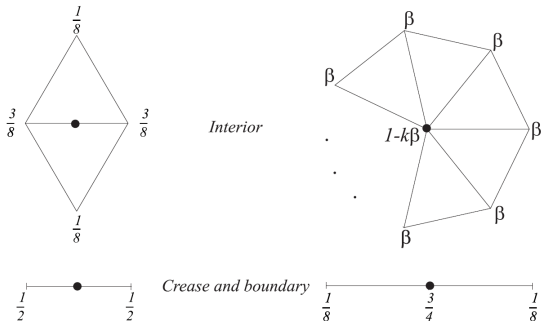
$$\hat{p}_i + w(n)(p_i - \hat{p}_i),$$

gdzie n to walencyjność wierzchołka, a w jest funkcją opisującą współczynnik korekcji (ang. correction factor), która dla powierzchni Catmulla-Clarka ma postać:

$$w(n) = \frac{4}{n}.$$

Przykłady innych powierzchni subdivision

Powierzchnia Loopa

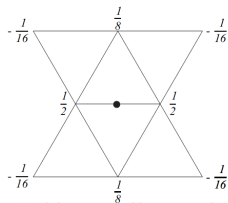


a. Masks for odd vertices

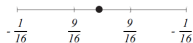
b. Masks for even vertices

gdzie $\beta = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right)$ oraz k to walencyjność wierzchołka.

Powierzchnia motyla (ang. butterfly)

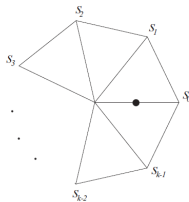


Mask for interior odd vertices with regular neighbors



Mask for crease and boundary vertices

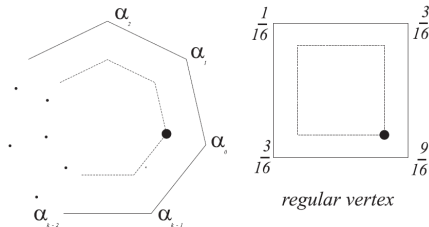
a. Masks for odd vertices



b. Mask for odd vertices adjacent to an extraordinary vertex

gdzie k – walencyjność, a $s_i = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \cos \frac{2i\pi}{k} + \frac{1}{2} \cos \frac{4i\pi}{k} \right)$, gdy $k \geq 5$. Dla $k = 3$, $s_0 = \frac{5}{12}$, $s_1 = s_2 = -\frac{1}{12}$. Dla $k = 4$, $s_0 = \frac{3}{8}$, $s_1 = s_3 = 0$, $s_2 = -\frac{1}{8}$.

Powierzchnia Doo-Sabin



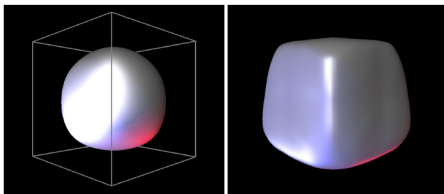
Mask for interior vertices



Mask for boundary vertices

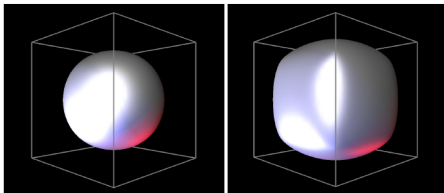
gdzie k – walencyjność, $\alpha_0 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4k}$ i $\alpha_i = \frac{(3+2 \cos \frac{2i\pi}{k})}{4k}$ dla $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Porównanie różnych powierzchni subdivision dla tej samej siatki kontrolnej



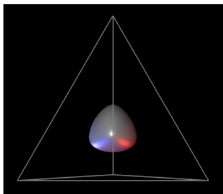
Loop

Butterfly

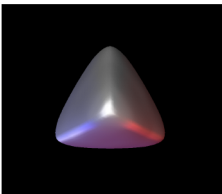


Catmull-Clark

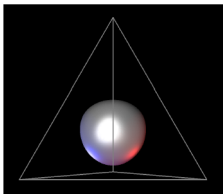
Doo-Sabin



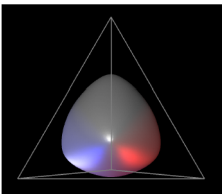
Loop



Butterfly



Catmull-Clark



Doo-Sabin