

MODELOWANIE GEOMETRYCZNE

Zestaw 4

Trójkątny płat Béziera

Wielomianem Bernsteina stopnia n trzech zmiennych nazywamy wielomian:

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad (1)$$

gdzie $i, j, k \geq 0$ oraz $i + j + k = n$. Ponadto przyjmujemy, że $B_{ijk}^n(u, v, w) = 0$ dla $i < 0, j < 0, k < 0$ lub $i + j + k \neq n$.

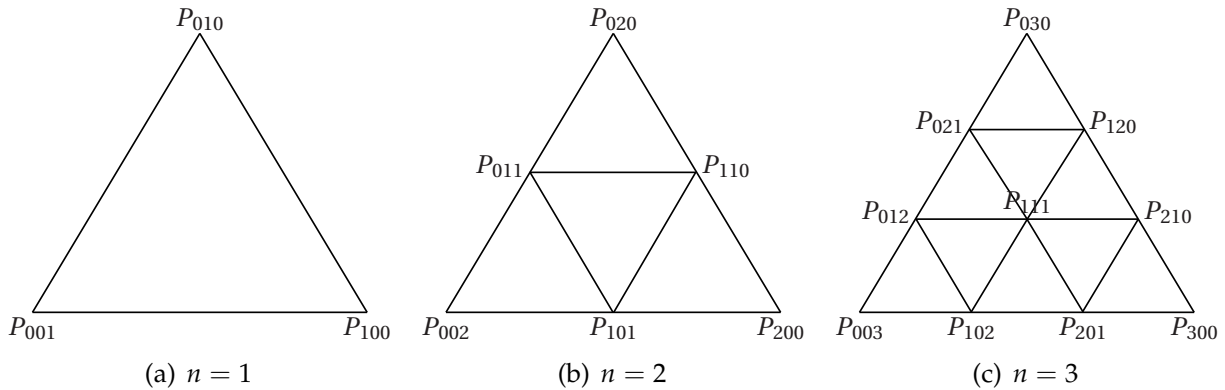
Zmienne u, v, w (z warunkiem $u + v + w = 1$) możemy przyjąć za współrzędne barycentryczne punktu na płaszczyźnie, w układzie odniesienia punktów $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$. Trójkąt ten przyjmowany jest za dziedzinę płata trójkątnego. Zamiast trzech parametrów u, v, w możemy wprowadzić dwa parametry s, t następująco $u = s$, $v = t$, $w = 1 - s - t$ (takie podejście stosuje się w implementacji).

Trójkątny płat Béziera stopnia n określony jest wzorem:

$$P(u, v, w) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i + j + k = n}} P_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \quad (2)$$

gdzie $P_{ijk} \in \mathbb{R}^3$.

Punkty P_{ijk} nazywamy punktami kontrolnymi płata. Dla stopnia n jest ich $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Siatki punktów kontrolnych trójkątnych płatów Béziera dla różnych stopni przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1. Siatki kontrolne dla trójkątnych płatów Béziera stopnia n

Zgodnie z wcześniejszą uwagą trójkątny płat Béziera możemy zapisać jako zależność jedynie dwóch zmiennych s, t , tzn.

$$S(s, t) = P(s, t, 1 - s - t), \quad (3)$$

gdzie $s, t \in [0, 1]$ oraz $1 - s - t \geq 0$.

Pochodne cząstkowe potrzebne do wyznaczenia wektora normalnego w punkcie (s_0, t_0) wynoszą:

$$\frac{\partial S}{\partial s}(s_0, t_0) = n \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n-1}} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k+1}) B_{ijk}^{n-1}(s_0, t_0, 1 - s_0 - t_0), \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(s_0, t_0) = n \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n-1}} (P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k+1}) B_{ijk}^{n-1}(s_0, t_0, 1 - s_0 - t_0). \quad (5)$$

Płaty trójkątne można uogólnić na dowolny wielokąt. Są to S-płaty (ang. S-patch).

Literatura

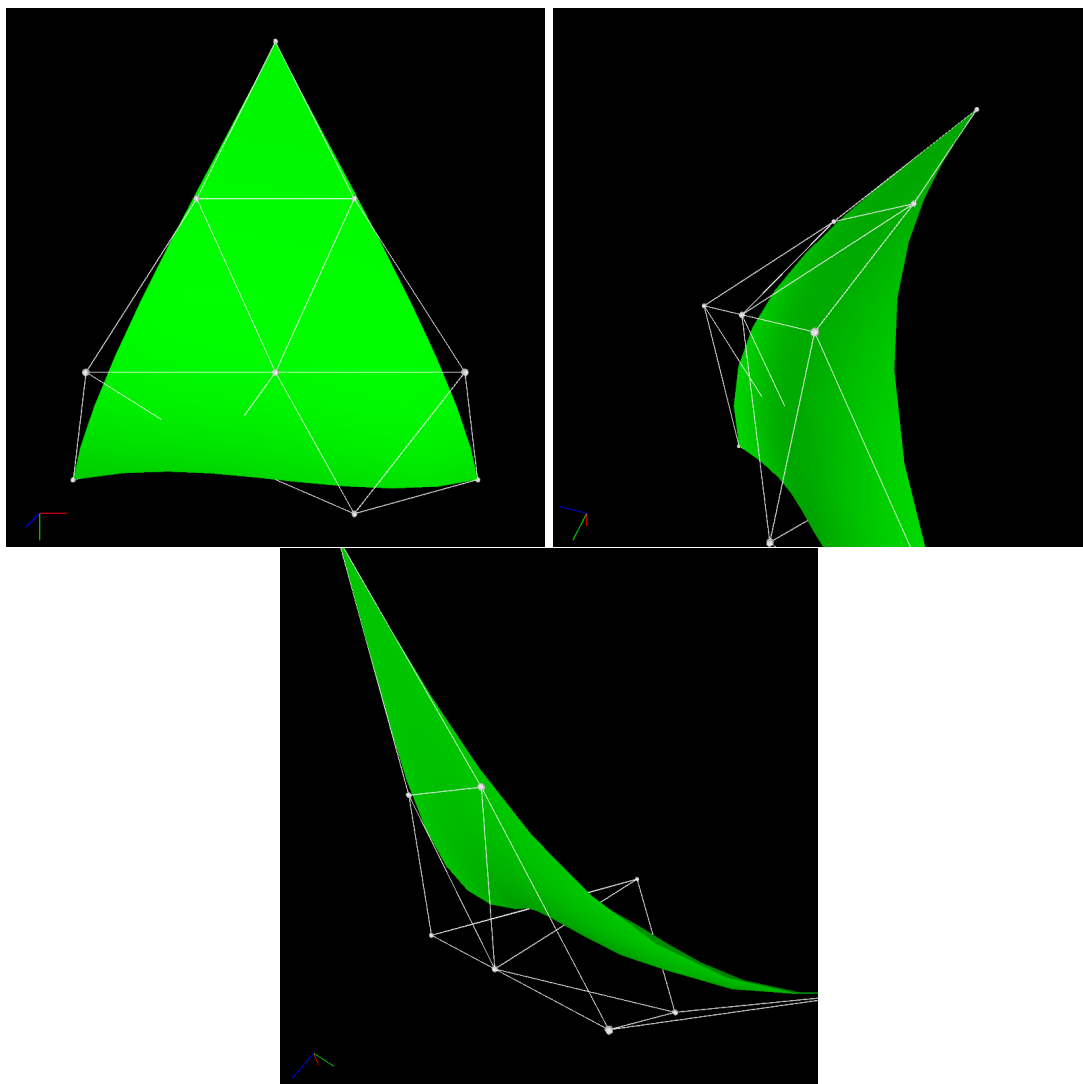
- [1] Farin, G.: Curves and Surfaces for CAGD – A Practical Guide. 5th Edition, Morgan Kaufmann Publishers, (2002)
- [2] Haines, E., Akenine-Möller, T.: Bézier Triangles and N-Patches. (2002)
<https://www.gamedeveloper.com/programming/b-zier-triangles-and-n-patches>
- [3] Kiciak, P.: Podstawy modelowania krzywych i powierzchni – zastosowania w grafice komputerowej. Wyd. 3, WNT, (2019)
- [4] Salomon, D.: Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer, (2006)

Zadanie

Napisać aplikację prezentującą trójkątny płat Béziera stopnia 3. Aplikacja powinna posiadać następujące funkcjonalności:

- określenie liczby punktów aproksymujących powierzchnię,
- rysowanie trójkątnego płata Béziera o zadanych punktach kontrolnych (należy pamiętać o obliczeniu i ustawieniu normali),
- rysowanie punktów kontrolnych,
- rysowanie siatki kontrolnej,
- włączenie/wyłączenie rysowania trójkątnego płata Béziera,
- włączenie/wyłączenie rysowania punktów kontrolnych,
- włączenie/wyłączenie rysowania siatki kontrolnej,
- obracanie sceną.

Przykładowy wygląd obszaru renderingu aplikacji przedstawia Rysunek 2.



Rysunek 2. Zawartość okna po uruchomieniu aplikacji