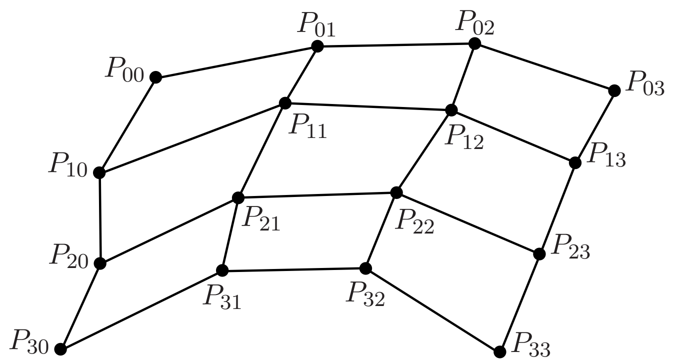
Modelowanie geometryczne

Zestaw 3

Powierzchnie bikubiczne

Powierzchnie bikubiczne są to powierzchnie parametryczne zdefiniowane jako iloczyn tensorowy dwóch krzywych kubicznych (w $\mathbb{R}^3$). Ponieważ każda krzywa kubiczna definiowana jest przez 4 punkty kontrolne, więc powierzchnia dana jako iloczyn tensorowy takich krzywych definiowana jest przez 16 punktów kontrolnych. Siatkę jaką tworzą te punkty nazywamy siatką kontrolną. Rysunek 1 przedstawia przykładową siatkę wraz z numeracją punktów kontrolnych.



Rysunek 1. Punkty kontrolne i siatka kontrolna powierzchni bikubicznej

Mając dane 16 punktów kontrolnych $P_{00}, \ldots, P_{33}$ powierzchnia bikubiczna $S : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ dana jest wzorem:

$$S(u,v) = [u^3, u^2, u, 1] \cdot M_a^T \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot M_b \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie $u, v \in [0,1]$ oraz $M_a, M_b \in \mathbb{R}_4^4$ są macierzami przejścia od pewnej bazy do bazy kanonicznej.

W przypadku gdy jako macierze przejścia weźmiemy macierze przejścia dla krzywej Béziera (Catmulla–Roma, kardynalnej itp.) powierzchnię będziemy nazywać powierzchnią bikubiczną Béziera (Catmulla–Roma, kardynalną itp.). Oczywiście macierze M_a i M_b nie muszą być takie same, możemy np. jako macierz M_a wziąć macierz Béziera, a jako macierz M_b macierz Catmulla–Roma otrzymując powierzchnię bikubiczną Béziera–Catmulla–Roma.

W przypadku powierzchni bikubicznej Béziera krawędziami płata są krzywe Béziera dane punktami kontrolnymi: $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}$ dla „górnej" krawędzi, $P_{03}, P_{13}, P_{23}, P_{33}$ dla „prawej" krawędzi, $P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}$ dla „dolnej" krawędzi, $P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}$ dla „lewej" krawędzi. A zatem powierzchnia interpoluje punkty $P_{00}, P_{03}, P_{33}, P_{30}$.

Dla powierzchni bikubicznej Catmulla–Roma krawędziami płata są krzywe Catmulla–Roma dane punktami kontrolnymi: $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}$ dla „górnej" krawędzi, $P_{02}, P_{12}, P_{22}, P_{32}$ dla „prawej" krawędzi, $P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}$ dla „dolnej" krawędzi, $P_{01}, P_{11}, P_{21}, P_{31}$ dla „lewej" krzywej. A zatem powierzchnia interpoluje punkty $P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{21}$.

Normale

W grafice komputerowej w obliczeniach związanych z cieniowaniem i oświetleniem potrzebne są wektory normalne (normale). Wektorem normalnym nazywamy wektor prostopadły do płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym punkcie.

Załóżmy, że mamy pewną powierzchnię parametryczną (niekoniecznie bikubiczną) $S : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie $(u,v) \in [0,1]^2$ oraz $x, y, z : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że mamy punkt $(u_0, v_0) \in [0,1]^2$, w którym chcemy wyznaczyć normala. Żeby wyznaczyć normala najpierw obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0), \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0), \tag{4}$$

a następnie obliczamy iloczyn wektorowy ($\times$) tych pochodnych cząstkowych otrzymując normala:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{5}$$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{w_1} = [x_1, y_1, z_1]^T$, $\mathbf{w_2} = [x_2, y_2, z_2]^T$ dany jest wzorem:

$$\mathbf{w_1} \times \mathbf{w_2} = [y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot x_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2]^T. \tag{6}$$

Literatura

[1] Agoston, M.K.: Computer Graphics and Geometric Modeling: Implementation and Algorithms. Springer, London, (2005)

[2] Farin, G.: Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, 5th Edition. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, (2002)

[3] Salomon, D.: Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer, New York, (2006)

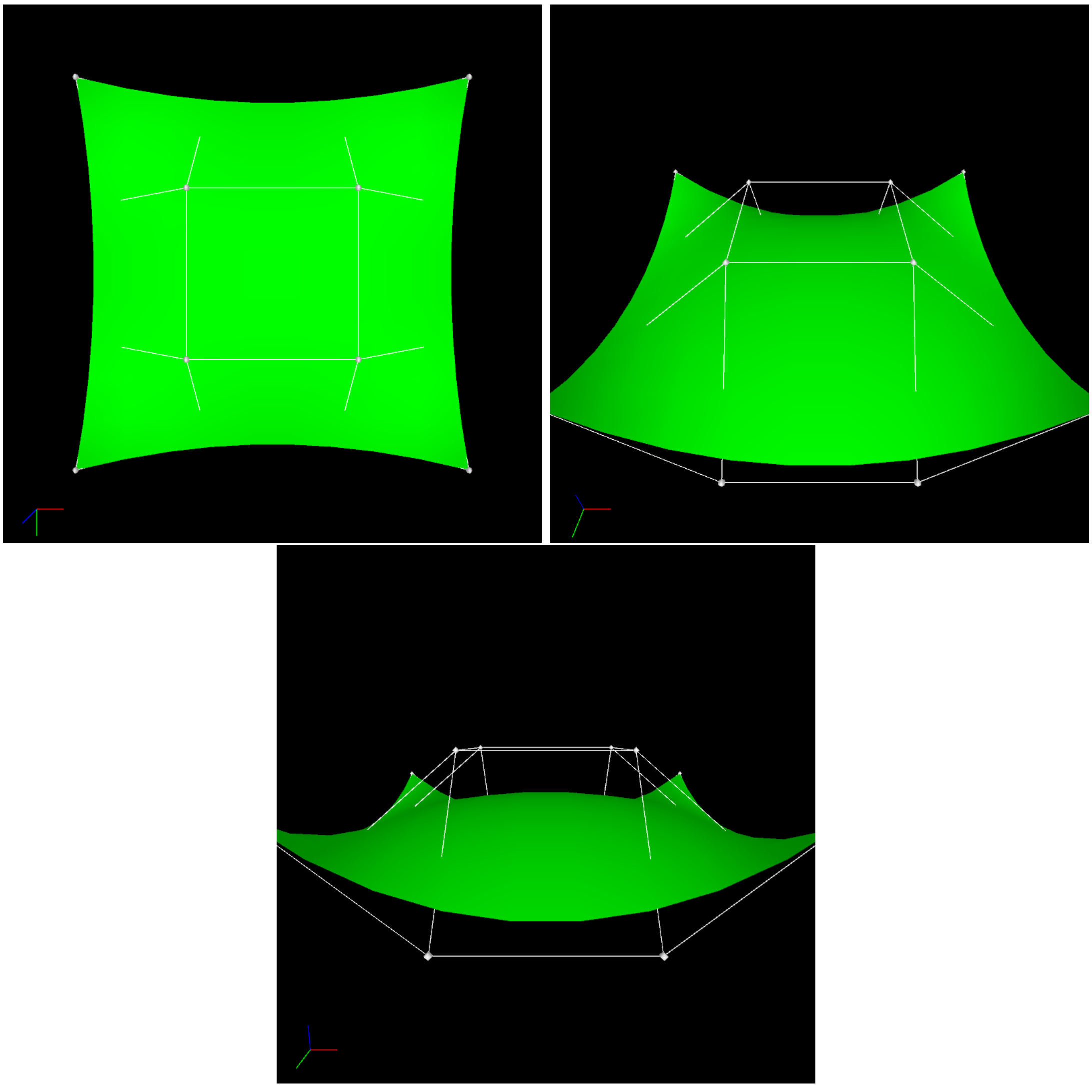
Zadanie

Napisać aplikację prezentującą różne płaty bikubiczne. Aplikacja powinna posiadać następujące funkcjonalności:

- określenie liczby punktów aproksymujących powierzchnię (osobna dla każdego z kierunków),
- rysowanie powierzchni bikubicznej o zadanych punktach kontrolnych (należy pamiętać o obliczeniu i ustawieniu normali),

- rysowanie punktów kontrolnych,
- rysowanie siatki kontrolnej,
- włączenie/wyłączenie rysowania powierzchni bikubicznej,
- włączenie/wyłączenie rysowania punktów kontrolnych,
- włączenie/wyłączenie rysowania siatki kontrolnej,
- wybór bazy dla każdego z kierunków (macierze M_a i M_b),
- obracanie sceną.

Przykładowy wygląd obszaru renderingu aplikacji przedstawia Rysunek 2.



Rysunek 2. Zawartość okna po uruchomieniu aplikacji