Grafika czasu rzeczywistego

Krzysztof Gdawiec

UNIWERSYTET ŚLĄSKI
INSTYTUT INFORMATYKI

Kwaterniony

W XIX w. próbowano znaleźć uogólnienie obrotu 2D danego za pomocą liczb zespolonych na przypadek 3D. 16 października 1843 roku podczas spaceru z żoną Hamilton wpadł na pomysł jak coś takiego zrobić. Swój twór Hamilton nazwał kwaternionami.

Hamilton zdefiniował kwaternion jako liczbę postaci:

$$q = s + ia + jb + kc,$$

gdzie $s, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$$ij = k, \qquad jk = i \qquad ki = j,$$

$$ji = -k, \qquad kj = -i, \qquad ik = -j$$

Zbiór kwaternionów oznaczamy przez $\mathbb{H}$.

Zbiór kwaternionów oznaczamy przez $\mathbb{H}$.

Kwaternion możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$q = [s, \mathrm{v}],$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$.

Zbiór kwaternionów oznaczamy przez $\mathbb{H}$.

Kwaternion możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$q = [s, \mathrm{v}],$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$.

Jeśli dodatkowo wektor v przedstawimy jako kombinację liniową wektorów $\mathrm{i} = [1, 0, 0]$, $\mathrm{j} = [0, 1, 0]$, $\mathrm{k} = [0, 0, 1]$, to kwaternion możemy zapisać w postaci:

$$q = [s, x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}],$$

gdzie $s, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Podstawowym działaniem na kwaternionach jakie będziemy potrzebować to mnożenie:

$$[s_a, \mathrm{a}][s_b, \mathrm{b}] = [s_a s_b - \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}, s_a \mathrm{b} + s_b \mathrm{a} + \mathrm{a} \times \mathrm{b}]$$

Mnożenie kwaternionów nie jest przemienne!!

Podstawowym działaniem na kwaternionach jakie będziemy potrzebować to mnożenie:

$$[s_a, \mathrm{a}][s_b, \mathrm{b}] = [s_a s_b - \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}, s_a \mathrm{b} + s_b \mathrm{a} + \mathrm{a} \times \mathrm{b}]$$

Mnożenie kwaternionów nie jest przemienne!!

Rozważmy dwa kwaterniony $q_a = [2, -2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} - 4\mathrm{k}]$, $q_b = [1, -2\mathrm{i} + 5\mathrm{j} - 6\mathrm{k}]$. Policzymy ich iloczyny $q_a q_b$ oraz $q_b q_a$.

$$
\begin{aligned}
q_a q_b &= [2 \cdot 1 - (-2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-6)), 2(-2\mathsf{i} + 5\mathsf{j} - 6\mathsf{k}) \\
&\quad + 1(-2\mathsf{i} + 3\mathsf{j} - 4\mathsf{k}) + (3 \cdot (-6) - (-4) \cdot 5)\mathsf{i} \\
&\quad - ((-2) \cdot (-6) - (-4) \cdot (-2))\mathsf{j} + ((-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-2))\mathsf{k}] \\
&= [-41, -4\mathsf{i} + 9\mathsf{j} - 20\mathsf{k}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_b q_a &= [1 \cdot 2 - (-2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + (-6) \cdot (-4)), 1(-2\mathsf{i} + 3\mathsf{j} - 4\mathsf{k}) \\
&\quad + 2(-2\mathsf{i} + 5\mathsf{j} - 6\mathsf{k}) + (5 \cdot (-4) - (-6) \cdot 3)\mathsf{i} \\
&\quad - ((-2) \cdot (-4) - (-6) \cdot (-2))\mathsf{j} + ((-2) \cdot 3 - 5 \cdot (-2))\mathsf{k}] \\
&= [-41, -8\mathsf{i} + 17\mathsf{j} - 12\mathsf{k}]
\end{aligned}
$$

Mnożenie kwaternionów możemy również przedstawić w postaci macierzowej:

$$[s_a, \mathrm{a}][s_b, \mathrm{b}] = \begin{bmatrix} s_a & -x_a & -y_a & -z_a \\ x_a & s_a & -z_a & y_a \\ y_a & z_a & s_a & -x_a \\ z_a & -y_a & x_a & s_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

Dodawanie/odejmowanie kwaternionów:

$$[s_a, \mathrm{a}] \pm [s_b, \mathrm{b}] = [s_a \pm s_b, \mathrm{a} \pm \mathrm{b}]$$

Dodawanie/odejmowanie kwaternionów:

$$[s_a, \mathrm{a}] \pm [s_b, \mathrm{b}] = [s_a \pm s_b, \mathrm{a} \pm \mathrm{b}]$$

Mnożenie kwaternionu przez skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda[s, \mathrm{v}] = [\lambda s, \lambda \mathrm{v}]$$

Kwaternion, dla którego $s = 0$ nazywamy czystym kwaternionem.

Kwaternion, dla którego $s = 0$ nazywamy czystym kwaternionem.

Ponieważ dowolny wektor v możemy przedstawić w postaci $\mathrm{v} = v\hat{\mathrm{v}}$, gdzie $v = \|\mathrm{v}\|$ i $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$, więc czysty kwaternion możemy przedstawić w postaci

$$[0, \mathrm{v}] = [0, v\hat{\mathrm{v}}] = v[0, \hat{\mathrm{v}}].$$

Kwaternion, dla którego $s = 0$ nazywamy czystym kwaternionem.

Ponieważ dowolny wektor v możemy przedstawić w postaci $\mathrm{v} = v\hat{\mathrm{v}}$, gdzie $v = \|\mathrm{v}\|$ i $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$, więc czysty kwaternion możemy przedstawić w postaci

$$[0, \mathrm{v}] = [0, v\hat{\mathrm{v}}] = v[0, \hat{\mathrm{v}}].$$

Kwaternion postaci $[0, \hat{\mathrm{v}}]$, gdzie $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$ nazywamy kwaternionem jednostkowym.

Kwaternion sprzężony do kwaternionu $q = [s, \mathrm{v}]$:

$$q^* = [s, -\mathrm{v}]$$

Kwaternion sprzężony do kwaternionu $q = [s, \mathrm{v}]$:

$$q^* = [s, -\mathrm{v}]$$

Sprzężenie kwaternionu ma następujące własności:

- $qq^* = q^*q$,
- $(q_a q_b)^* = q_b^* q_a^*$.

Kwaternion sprzężony do kwaternionu $q = [s, \mathrm{v}]$:

$$q^* = [s, -\mathrm{v}]$$

Sprzężenie kwaternionu ma następujące własności:

- $qq^* = q^*q$,
- $(q_a q_b)^* = q_b^* q_a^*$.

Norma kwaternionu $q = [s, \mathrm{v}]$:

$$|q| = \sqrt{s^2 + \|\mathrm{v}\|^2}.$$

Można pokazać, że

- $qq^* = |q|^2$,
- $|q_a q_b|^2 = |q_a|^2 |q_b|^2$,
- $|q_a q_b| = |q_a||q_b|$.

Można pokazać, że

- $qq^* = |q|^2$,
- $|q_a q_b|^2 = |q_a|^2 |q_b|^2$,
- $|q_a q_b| = |q_a||q_b|$.

Kwaternion q' nazywamy znormalizowanym, gdy

$$q' = \frac{q}{|q|}$$

Można pokazać, że

- $qq^* = |q|^2$,
- $|q_a q_b|^2 = |q_a|^2 |q_b|^2$,
- $|q_a q_b| = |q_a||q_b|$.

Kwaternion q' nazywamy znormalizowanym, gdy

$$q' = \frac{q}{|q|}$$

Kwaternion odwrotny do q:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

Można pokazać, że:

$$(q_a q_b)^{-1} = q_b^{-1} q_a^{-1}$$

Weźmy kwaternion q postaci:

$$q = [\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta \hat{\mathrm{v}}],$$

gdzie $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$ oraz czysty kwaternion p przechowujący wektor p, tzn.

$$p = [0, \mathrm{p}].$$

Weźmy kwaternion q postaci:

$$q = [\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta \hat{\mathrm{v}}],$$

gdzie $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$ oraz czysty kwaternion p przechowujący wektor p, tzn.

$$p = [0, \mathrm{p}].$$

Jeśli policzymy

$$qpq^{-1},$$

to okazuje się, że otrzymujemy czysty kwaternion przechowujący wektor p obrócony wokół osi $\hat{\mathrm{v}}$ o kąt θ.

Weźmy kwaternion q postaci:

$$q = [\cos\frac{1}{2}\theta, \sin\frac{1}{2}\theta\hat{\mathrm{v}}],$$

gdzie $\|\hat{\mathrm{v}}\| = 1$ oraz czysty kwaternion p przechowujący wektor p, tzn.

$$p = [0, \mathrm{p}].$$

Jeśli policzymy

$$qpq^{-1},$$

to okazuje się, że otrzymujemy czysty kwaternion przechowujący wektor p obrócony wokół osi $\hat{\mathrm{v}}$ o kąt θ.
Kwaternion $q^{-1}pq$ dokonuje obrotu w odwrotną stronę, tzn. o kąt $-\theta$.

Niech $q = [s, \mathrm{v}] = [s, x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}]$ i $|q| = 1$ oraz
$p = [0, \mathrm{p}] = [0, x_p\mathrm{i} + y_p\mathrm{j} + z_p\mathrm{k}]$.
Kwaternion qpq^{-1} można zapisać w postaci macierzowej:

$$qpq^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xy - sz) & 2(xz + sy) \\ 0 & 2(xy + sz) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz - sx) \\ 0 & 2(xz - sy) & 2(yz + sx) & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Niech $q = [s, \mathrm{v}] = [s, x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}]$ i $|q| = 1$ oraz $p = [0, \mathrm{p}] = [0, x_p\mathrm{i} + y_p\mathrm{j} + z_p\mathrm{k}]$.
Kwaternion qpq^{-1} można zapisać w postaci macierzowej:

$$qpq^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-sz) & 2(xz+sy) \\ 0 & 2(xy+sz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-sx) \\ 0 & 2(xz-sy) & 2(yz+sx) & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Macierz

$$\begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-sz) & 2(xz+sy) \\ 2(xy+sz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-sx) \\ 2(xz-sy) & 2(yz+sx) & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

reprezentuje macierz obrotu.

Załóżmy, że chcemy dokonać dwóch obrotów po sobie, które są reprezentowane przez kwaterniony q_1 i q_2.

Załóżmy, że chcemy dokonać dwóch obrotów po sobie, które są reprezentowane przez kwaterniony q_1 i q_2.

Kuszącym jest przekonwertowanie kwaternionów na macierze i wymnożenie ich. Nie jest to najbardziej efektywny sposób łączenia rotacji. Najlepszym sposobem jest łączenie ich jako kwaterniony i późniejsza konwersja otrzymanego kwaternionu na macierz.

Załóżmy, że chcemy dokonać dwóch obrotów po sobie, które są reprezentowane przez kwaterniony q_1 i q_2.

Kuszącym jest przekonwertowanie kwaternionów na macierze i wymnożenie ich. Nie jest to najbardziej efektywny sposób łączenia rotacji. Najlepszym sposobem jest łączenie ich jako kwaterniony i późniejsza konwersja otrzymanego kwaternionu na macierz.

Najpierw dokonujemy obrotu używając q_1:

$$q_1 p q_1^{-1},$$

a następnie obrotu używając q_2:

$$q_2(q_1 p q_1^{-1})q_2^{-1}.$$

Co możemy zapisać następująco:

$$(q_2 q_1)p(q_2 q_1)^{-1}$$