

Metody fraktalne w grafice komputerowej

Krzysztof Gdawiec



UNIWERSYTET ŚLĄSKI
INSTYTUT INFORMATYKI

Fraktal jako atraktor

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech ponadto $\mathcal{H}(X)$ oznacza przestrzeń niepustych podzbiorów zwartych przestrzeni X .

Definicja

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, $x \in X$ i $B \in \mathcal{H}(X)$. Rozszerzmy metrykę d na zbiór $X \times \mathcal{H}(X)$ następująco:

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Wówczas mówimy, że $d(x, B)$ jest **odległością punktu x od zbioru B** .

Definicja

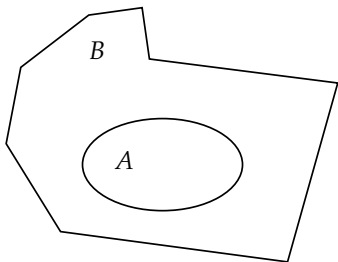
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Rozszerzmy metrykę d na zbiór $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$ następująco:

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

Wówczas mówimy, że $d(A, B)$ jest **odległością zbioru A od zbioru B** .

Zauważmy, że tak zdefiniowane rozszerzenie metryki d jeszcze nie jest metryką w $\mathcal{H}(X)$. Nie spełnia ono warunku symetrii.

Rozważmy przestrzeń metryczną (\mathbb{R}^2, d_e) i dowolne dwa niepuste zbiory zwarte $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ takie, że $A \subsetneq B$, np.



Ponieważ $A \subsetneq B$, więc dla dowolnego $x \in A$ mamy, że $d(x, B) = \min\{d_e(x, y) : y \in B\} = 0$. A zatem $d(A, B) = 0$. Z drugiej strony istnieje $y \in B$ takie, że dla każdego $x \in A$ zachodzi $d_e(y, x) > 0$. Stąd otrzymujemy, że $d(y, A) > 0$, co pociąga za sobą, że $d(B, A) > 0$. Czyli $d(A, B) \neq d(B, A)$.

Definicja

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Zdefiniujemy funkcję $h_X : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ następująco:

$$\forall_{A, B \in \mathcal{H}(X)} \quad h_X(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Funkcję h_X nazywamy **metryką Hausdorffa**.

Twierdzenie

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas przestrzeń $(\mathcal{H}(X), h)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

Lemat

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $w : X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem zwężającym ze współczynnikiem zwężania s . Wówczas rozszerzenie $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ zdefiniowane zależnością:

$$\forall B \in \mathcal{H}(X) \quad w(B) = \{w(x) : x \in B\}$$

jest przekształceniem zwężającym na $(\mathcal{H}(X), h)$ ze współczynnikiem zwężania s .

Lemat

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ będą odwzorowaniami zwężającymi na $(\mathcal{H}(X), h)$. Oznaczmy przez s_n współczynnik zwężania odwzorowania w_n dla $n = 1, 2, \dots, N$. Zdefiniujmy odwzorowanie $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ następująco:

$$\forall B \in \mathcal{H}(X) \quad W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B).$$

Wówczas W jest odwzorowaniem zwężającym ze współczynnikiem zwężania $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Odwzorowanie W z lematu nazywamy **operatorem Hutchinsona**.

Definicja

Iterowanym układem funkcyjnym (ang. Iterated Function System) nazywamy parę złożoną z przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) i skończonego zbioru odwzorowań zwężających $w_n : X \rightarrow X$ ze współczynnikami zwężania s_n , dla $n = 1, \dots, N$. Zapisywać go będziemy w postaci $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$, a jego współczynnik zwężania $s = \max\{s_n : n = 1, \dots, N\}$.

W dalszej części wykładu często będziemy używać skrótu układ IFS zamiast iterowany układ funkcyjny.

Twierdzenie

Niech $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$ będzie układem IFS ze współczynnikiem zwężania s . Wówczas odwzorowanie $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ zdefiniowane zależnością:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{H}(X)$ jest przekształceniem zwężającym na przestrzeni metrycznej zupełnej $(\mathcal{H}(X), h)$ ze współczynnikiem zwężania s , tzn.

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$$

dla wszystkich $B, C \in \mathcal{H}(X)$.

Ponadto, odwzorowanie W posiada dokładnie jeden punkt stały $A \in \mathcal{H}(X)$, tzn. $A = W(A)$ i jest on dany wzorem $A = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$, gdzie $B_k = W^k(B)$ dla dowolnego $B \in \mathcal{H}(X)$.

Zapis W^k w twierdzeniu rozumiemy jako k -krotne złożenie operatora W .

Definicja

Punkt stały $A \in \mathcal{H}(X)$ występujący w twierdzeniu z poprzedniego slajdu nazywamy **atraktorem** układu IFS lub fraktalem.

Dotychczasowe rozważania miały charakter bardzo ogólny dlatego też w praktycznych zastosowaniach fraktali przyjmuje się konkretną przestrzeń metryczną i ogranicza się do pewnej klasy odwzorowań zwężających.

Najczęściej w praktyce używa się przestrzeni (\mathbb{R}^n, d_e) , a jako przekształcenia zwężające bierze się przekształcenia afiniczne $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ postaci:

$$w(x) = Ax + t,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}_n^n$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Oczywiście, nie każde odwzorowanie afiniczne jest zwężające, a zatem potrzebujemy jakiegoś warunku, który będzie nam gwarantował zwężanie.

Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$\|w(x) - w(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\|.$$

Ponieważ odwzorowanie postaci Ax jest liniowe i ciągłe, więc

$$\|w(x) - w(y)\| \leq \|A\| \|x - y\|.$$

A zatem, aby odwzorowanie w było zwężające musi być spełniony warunek $\|A\| < 1$. Jeśli przyjmiemy następującą normę macierzy

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)},$$

gdzie $\lambda_{\max}(A^T A)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A^T A$, to warunek przyjmie postać:

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} < 1.$$

Przypomnijmy czym jest wartość własna macierzy.

Definicja

Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością własną** macierzy $A \in \mathbb{R}_n^n$ jeśli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$Av = \lambda v.$$

Wektor v nazywamy **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A nazywamy **widmem**.

Generowanie atraktora układu IFS

W literaturze zaproponowano wiele różnych algorytmów generowania atraktora danego układu IFS, np.

- ▶ metoda deterministyczna,
- ▶ metoda losowa,
- ▶ metoda minimalnego rysowania,
- ▶ metoda czasu ucieczki,
- ▶ metoda bazująca na obrazie,
- ▶ itp.

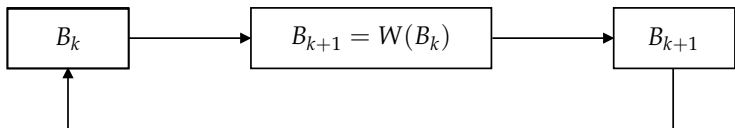
Przegląd różnych metod można znaleźć w książce:

Nikiel, S.: Iterated Function Systems for Real-time Image Synthesis. Springer, London, (2007)

Metoda deterministyczna

Metoda deterministyczna, inaczej zwana kopiarka wielokrotnie redukująca (KWR), wynika bezpośrednio z definicji atraktora.

Założmy, że mamy dany układ IFS $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$.
Wybieramy dowolny zbiór startowy $B \in \mathcal{H}(X)$. Następnie wykonujemy iteracje $B_k = W^k(B)$ dla $k = 1, 2, \dots$



Wraz ze wzrostem wykonanych iteracji k dostajemy coraz lepszą aproksymację atraktora danego układu IFS.

Kluczową rolę w zbieżności procesu iteracyjnego odgrywa współczynnik zwężania układu IFS. Im jest on bliższy 1 tym zbieżność jest wolniejsza, a co za tym idzie żeby dostać dobrą aproksymację atraktora musimy wykonać więcej iteracji.

W celu wygenerowania obrazu atraktora za pomocą KWR wykonujemy kilka początkowych iteracji otrzymując pewną (dobrą) aproksymację atraktora. Po osiągnięciu pewnej iteracji (innej dla różnych układów IFS), nawet gdybyśmy wykonywali kolejne iteracje, nie będziemy w stanie zobaczyć dalszych szczegółów atraktora ze względu na rozdzielczość obrazu. A zatem taka aproksymacja w zupełności wystarcza.

Algorytm deterministyczny, mimo swej prostoty, nie jest często stosowany w praktyce ponieważ szybkość generowania atraktora jest wolniejsza niż dla większości innych algorytmów.

Jest to konsekwencją tego, że wraz z każdą następną iteracją liczba podzbiorów zwiększa się N razy i tak np. w $k - 1$ iteracji mamy N^{k-1} podzbiorów, które stają się wejściem dla k -tej iteracji, w której po przekształceniu tych N^{k-1} podzbiorów dostaniemy N^k podzbiorów.

Jak widać z każdą iteracją rośnie pamięć potrzebna na zapamiętanie podzbiorów oraz ilość obliczeń potrzebnych do wykonania iteracji.

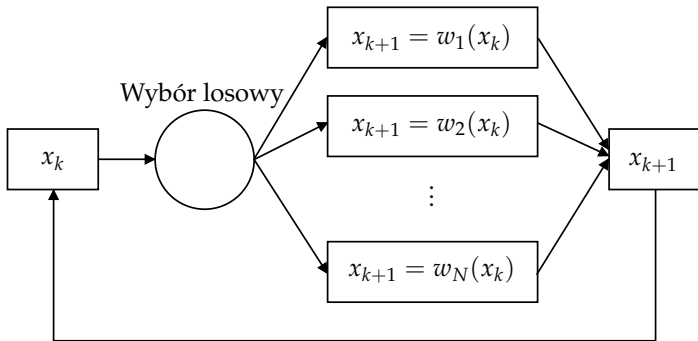
Metoda losowa

Do wprowadzenia metody losowej, inaczej zwanej grą w chaos, musimy zdefiniować dodatkowe pojęcie.

Definicja

Iterowanym układem funkcyjnym z prawdopodobieństwami nazywamy układ IFS $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ wraz ze zbiorem prawdopodobieństw $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ takich, że $p_1 + \dots + p_N = 1$ oraz $p_n > 0$ dla $n = 1, 2, \dots, N$. Prawdopodobieństwo p_n jest związane z przekształceniem w_n dla $n = 1, 2, \dots, N$. Układ IFS z prawdopodobieństwami oznaczamy będziemy $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$.

W grze w chaos mamy dany układ IFS z prawdopodobieństwami $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ oraz dowolny punkt startowy $x_0 \in X$.



W praktyce nie jesteśmy w stanie wykonać nieskończenie wielu iteracji, więc dodatkowo w algorytmie określamy maksymalną liczbę iteracji, które należy wykonać.

S.Nikiel w swojej książce oszacował liczbę iteracji potrzebnych do otrzymania dobrej aproksymacji atraktora liczbą $8 \cdot H \cdot V$, gdzie H oznacza rozdzielczość poziomą, a V rozdzielczość pionową obrazu, który generujemy.

Punkt startowy x_0 może być dowolnie wybranym punktem.

W przypadku gdy ten punkt nie należy do atraktora od kilku do kilkunastu punktów wygenerowanych na początku losowego procesu iteracyjnego również nie będzie należało do atraktora. Po tych kilku do kilkunastu iteracjach wszystkie kolejne generowane punkty będą należeć do atraktora. W takiej sytuacji pomija się przy rysowaniu kilkanaście pierwszych iteracji.

W przypadku gdy punkt startowy należy do atraktora wszystkie wygenerowane punkty w losowym procesie iteracyjnym będą również należeć do atraktora, a zatem możemy wyrysować wszystkie powstałe punkty.

Dobór punktu startowego, tak żeby należał do atraktora możemy wykonać, np. wybierając punkt stały któregośkolwiek przekształcenia z układu IFS (istnienie takiego punktu wynika z twierdzenia Banacha o punkcie stałym).

W grze w chaos zakładamy, że mamy układ IFS z prawdopodobieństwami. A co jeśli mamy tylko układ IFS?

W przypadku gdy odwzorowania zwężające w_k (w \mathbb{R}^n) są afiniczne możemy wyznaczyć prawdopodobieństwa, tak aby otrzymać równomierną zbieżność do atraktora.

Niech A_k oznacza macierz przekształcenia w_k dla $k = 1, 2, \dots, N$.

Moglibyśmy przyjąć jednakowe prawdopodobieństwo dla każdego przekształcenia, ale w niektórych przypadkach taki dobór nie będzie prowadził do równomiernej zbieżności.

Dużo lepszym wyborem jest przyjęcie następujących prawdopodobieństw:

$$p_k = \frac{|\det A_k|}{\sum_{i=1}^N |\det A_i|} \quad k = 1, \dots, N.$$

Jeśli dla pewnego $k \in \{1, \dots, N\}$ wyznacznik $\det A_k = 0$, to jako p_k przyjmujemy jakąś małą dodatnią liczbę np. 0.001, a od pozostałych prawdopodobieństw odejmujemy takie liczby, aby był spełniony warunek $p_1 + \dots + p_N = 1$.

W przypadku, gdy wszystkie wyznaczniki są równe zero, to prawdopodobieństwa dobieramy empirycznie lub przyjmujemy jednakowe prawdopodobieństwa.

Przykłady atraktorów

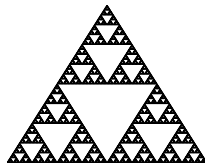
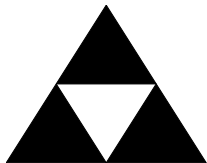
Trójkąt Sierpińskiego, odkryty w 1915 r., może być wygenerowany za pomocą następującego układu IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$, gdzie

$$w_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Iteracje (od lewej): 1, 4, 8. Zbiór startowy: trójkąt.



Paprotka Barnsleya dana jest układem IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$:

$$w_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.849 & 0.037 \\ -0.037 & 0.849 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.075 \\ 0.183 \end{bmatrix},$$

$$w_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.197 & -0.226 \\ 0.226 & 0.197 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.049 \end{bmatrix},$$

$$w_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.283 \\ 0.26 & 0.237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.575 \\ -0.084 \end{bmatrix},$$

$$w_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prawdopodobieństwa zostały dobrane używając przedstawionej wcześniej metody.

Liczba iteracji (od lewej): 1 000, 10 000, 100 000.



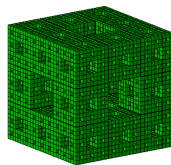
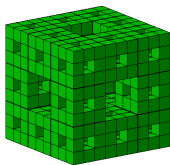
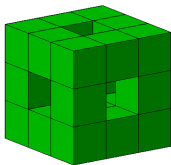
Układ IFS

$\{\mathbb{R}^3; w_{ijk}, (i, j, k) \in \{0, 1, 2\}^3 \setminus \{(i, j, k) \in \{0, 1, 2\}^3 : (i = j = 1, k = 0, 1, 2) \vee (j = k = 1, i = 0, 1, 2) \vee (i = k = 1, j = 0, 1, 2)\}\}$
dla kostki Mengera dany jest wzorem:

$$w_{ijk} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{3} \\ \frac{j}{3} \\ \frac{k}{3} \end{pmatrix}.$$

Przekształceń w powyższym układzie IFS jest 20.

Iteracje (od lewej): 1, 2, 3. Zbiór startowy: sześcian.



Odwrotny problem fraktalny

Do tej pory zajmowaliśmy się problemem jak mając dany układ IFS wygenerować atraktor tego układu. Obecnie zajmiemy się odwrotnym problemem, czyli jak mając dany zbiór $A \in \mathcal{H}(X)$ znaleźć układ IFS, którego atraktorem jest A .

Problem ten jest znany pod nazwą **odwrotnego problemu fraktalnego**. W odróżnieniu od generowania atraktora, dla którego znamy wiele prostych i efektywnych algorytmów, problem znalezienia układu IFS dla danego zbioru jest problemem bardzo trudnym.

Jedno z podejść do tego problemu zaprezentował M. Barnsley w swoim twierdzeniu o kolażu.

Twierdzenie (o kolażu)

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech będą dane $L \in \mathcal{H}(X)$ oraz $\varepsilon > 0$. Wybieramy układ IFS $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ ze współczynnikiem zwężania $0 \leq s < 1$ taki, że

$$h(L, \bigcup_{n=1}^N w_n(L)) \leq \varepsilon.$$

Wówczas

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s},$$

gdzie A jest atraktorem wybranego układu IFS.

Definicja

Stałą ε z twierdzenia o kolażu nazywamy **błędem kolażu**.

Metoda wynikająca z twierdzenia o kolażu wygląda następująco.

Bierzemy zbiór $L \in \mathcal{H}(X)$ i pokrywamy go kopiami samego siebie otrzymanymi przez przekształcenie tego zbioru poprzez przekształcenia zwężające. Pokrycie dobieramy w ten sposób, aby odległość Hausdorffa między zbiorem L , a tym pokryciem była mniejsza bądź równa ε .

Wyznaczony w taki sposób układ IFS posiada atraktor A , który zgodnie z tezą twierdzenia o kolażu jest oddalony od zbioru L o co najwyżej $\frac{\varepsilon}{1-s}$.

W praktyce wykorzystując twierdzenie o kolażu wymagamy aby liczba odwzorowań zwężających wchodzących w skład układu IFS była jak najmniejsza oraz żeby pomniejszone kopie nachodziły na siebie w jak najmniejszym stopniu. Stawiamy takie wymagania ponieważ w ten sposób otrzymamy niewielką ilość informacji potrzebnych do wygenerowania atraktora.



Następujące twierdzenie jest ważnym narzędziem m.in. w grafice komputerowej oraz jest blisko związane z twierdzeniem o kolażu. Ustala ono ciągłą zależność atraktora od parametrów odwzorowań składających się na układ IFS.

Twierdzenie

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech ponadto $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ będzie układem IFS ze współczynnikiem zwężania s . Dla $n = 1, \dots, N$ niech w_n zależy w sposób ciągły od parametru $p \in P$, gdzie (P, d_p) jest przestrzenią metryczną zwartą. Wówczas atraktor $A(p) \in \mathcal{H}(X)$ zależy w sposób ciągły od parametru $p \in P$ w sensie metryki Hausdorffa.

Twierdzenie z poprzedniego slajdu możemy interpretować w następujący sposób: niewielkie zmiany parametrów przekształceń wchodzących w skład układu IFS prowadzą do małych zmian w atraktorze.

Jest to bardzo ważna własność ponieważ:

- ▶ możemy kontrolować w sposób ciągły atraktor poprzez zmianę parametrów odwzorowań wchodzących w skład układu IFS,
- ▶ gwarantuje nam, że możemy przejść od jednego atraktora do innego w sposób ciągły, czyli wykonać tak zwany fraktalny morfing.

Rozważmy układ IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ generujący paprotkę Barnsleya, w którym w_1 posiada jeden parametr $p \in \mathbb{R}$, gdzie

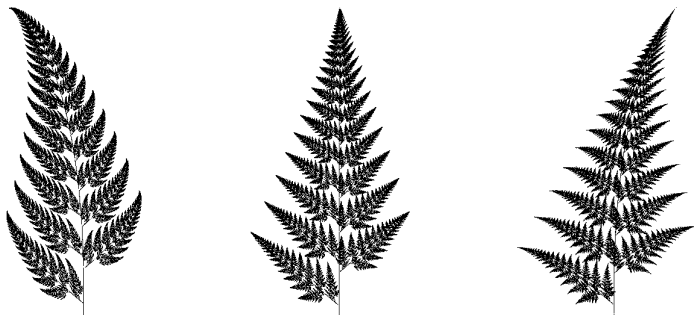
$$w_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.849 & 0.037 + p \\ -0.037 & 0.849 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.075 \\ 0.183 \end{bmatrix},$$

$$w_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.197 & -0.226 \\ 0.226 & 0.197 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.049 \end{bmatrix},$$

$$w_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.283 \\ 0.26 & 0.237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.575 \\ -0.084 \end{bmatrix},$$

$$w_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Paprotki dla różnych wartości parametru p (od lewej): 0, -0.037 , -0.067 .



Widzimy ciągłą zależność atraktora od parametru p przekształcenia w_1 .

Na zakończenie zwróćmy uwagę na jedną ważną rzecz. A mianowicie na fakt, że dany atraktor może być generowany przez całkowicie różne układy IFS.

