

AUTOMATYCZNE GENEROWANIE ESTETYCZNYCH WZORÓW ZA POMOCĄ TRANSFORMACJI GUMOWSKIEGO-MIRY

KRZYSZTOF GDAWIEC, WIESŁAW KOTARSKI,
AGNIESZKA LISOWSKA

*Uniwersytet Śląski, Instytut Informatyki,
41-200 Sosnowiec, ul. Będzińska 39
email: {kgdawiec, kotarski, alisow}@ux2.math.us.edu.pl*

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie sposobu użycia jednego z dyskretnych układów dynamicznych, tj. transformacji Gumowskiego-Miry, do automatycznego generowania estetycznych wzorów. Zaprezentowane zostaną również trzy algorytmy kolorowania otrzymanych wzorów. Przedstawione przykłady pokazują ogromne możliwości tworzenia niepowtarzalnych wzorów za pomocą zaprezentowanych algorytmów. Wygenerowane za pomocą zaproponowanego algorytmu wzory mogą zostać użyte jako wzory na tkaniny, ceramikę czy też jako podstawa do wykonania różnego rodzaju ozdób czy biżuterii.

1. Wstęp

Estetyka odgrywa dużą rolę w wielu dziedzinach, np. architekturze, modzie oraz projektowaniu biżuterii. Najczęściej, większość pracy przy projektowaniu wzorów jest wykonywana przez człowieka. W przypadku, gdy wzory muszą być bardzo skomplikowane i niepowtarzalne, ilość pracy przy ich tworzeniu jest bardzo duża i wymaga poświęcenia znacznego czasu. W celu uproszczenia i przyspieszenia procesu projektowania estetycznych wzorów możemy skorzystać z możliwości jakie dają nam komputery oraz matematyka.

W ostatnich 20-stu latach badania nad geometrią fraktalną skupiły dużą uwagę naukowców ze względu na duże znaczenie teoretyczne oraz praktyczne. Jednym z takich zastosowań praktycznych jest użycie wzorów fraktalnych do automatycznego generowania estetycznych wzorów, np. na tkaninach [6] czy też w projektowaniu biżuterii [8]. Fraktale dają nam możliwość tworzenia bardzo skomplikowanych wzorów, których nie bylibyśmy w stanie stworzyć ręcznie.

W pracy przedstawimy sposób użycia transformacji Gumowskiego-Miry [3] do automatycznego generowania estetycznych wzorów. W odróżnieniu od algorytmów użytych w pracach [4],[6], gdzie rozpatrywano pojedynczą transformację, użyjemy zbioru transformacji oraz procesu losowego. W ten sposób będziemy mogli wygenerować całkowicie nowe wzory, których nie jesteśmy w stanie otrzymać używając tylko jednej transformacji.

W sekcji 2 przedstawimy podstawowe pojęcia używane w dalszej części pracy oraz zdefiniujemy transformację Gumowskiego-Miry. Ponadto przedstawimy przykładowe kształty jakie można uzyskać stosując transformację Gumowskiego-Miry. W sekcji 3 zaprezentujemy algorytm generowania wzorów. Sekcja 4 poświęcona została przedstawieniu trzech algorytmów kolorowania wzorów otrzymanych z algorytmu z sekcji 3. W sekcji 5 przedstawimy przykładowe kształty uzyskane za pomocą zaproponowanych algorytmów, zaś w sekcji 6 podamy wnioski końcowe oraz kierunki dalszych badań.

2. Transformacja Gumowskiego-Miry

Zacznijmy od wprowadzenia definicji układu dynamicznego [1].

Definicja 1. *Układem dynamicznym* nazywamy przekształcenie $f : X \rightarrow X$ na przestrzeni metrycznej (X, d) . *Orbitą* punktu $x \in X$ nazywamy ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie

$$x_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}}(x) = f^{\circ n}(x). \quad (1)$$

Generując elementy orbity danego układu dynamicznego zgodnie z (1) przy każdym elemencie dokonujemy obliczeń, których dokonywaliśmy przy poprzednich elementach. Takie powtarzanie obliczeń przekłada się na szybkość działania algorytmu generującego elementy orbity. W celu zmniejszenia ilości obliczeń zapiszmy element x_n dla $n > 0$ w postaci:

$$x_n = f^{\circ n}(x) = f(f^{\circ(n-1)}(x)) = f(x_{n-1}). \quad (2)$$

Wzór (2) nazywany jest *iteracją Picarda* [2] i został zastosowany w dalszej części pracy do generowania orbit transformacji Gumowskiego-Miry.

Transformacja Gumowskiego-Miry została wprowadzona w 1980 r. w CERN-ie i służyła do opisu trajektorii ruchu przyspieszonych cząstek [3]. Jest ona zdefiniowana następująco:

Definicja 2. *Transformacja Gumowskiego-Miry* jest to dyskretny układ dynamiczny określony na przestrzeni R^2 dany wzorami:

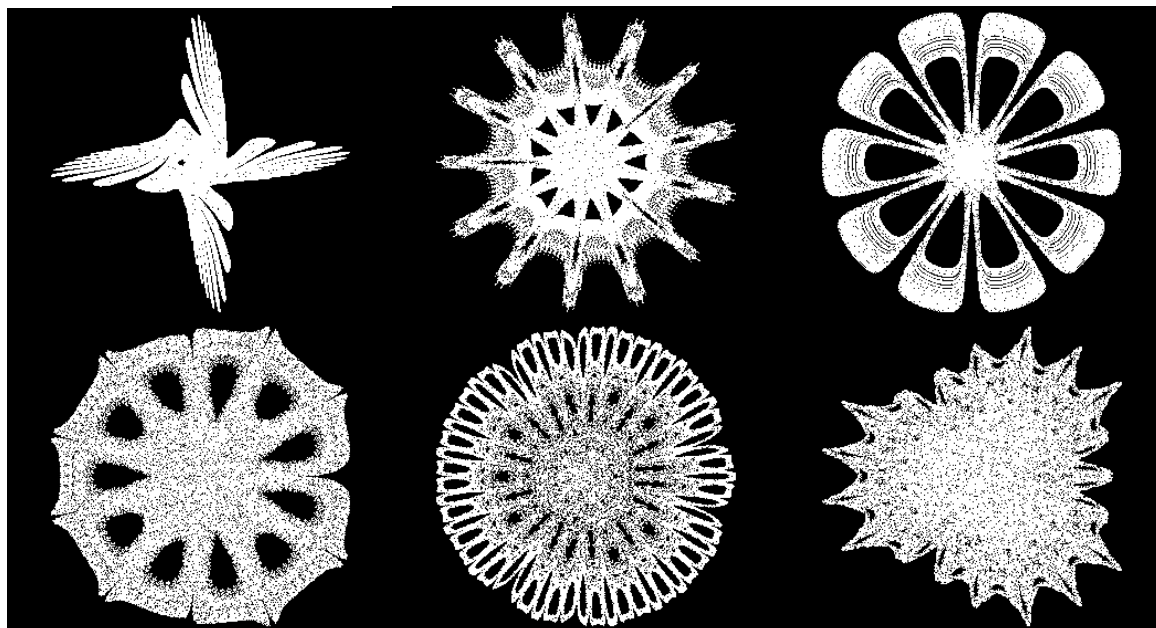
$$\begin{aligned} x_n &= y_{n-1} + \alpha(1 - 0.05y_{n-1}^2)y_{n-1} + g(x_{n-1}), \\ y_n &= -x_{n-1} + g(x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie odwzorowanie $g : R \rightarrow R$ dane jest wzorem:

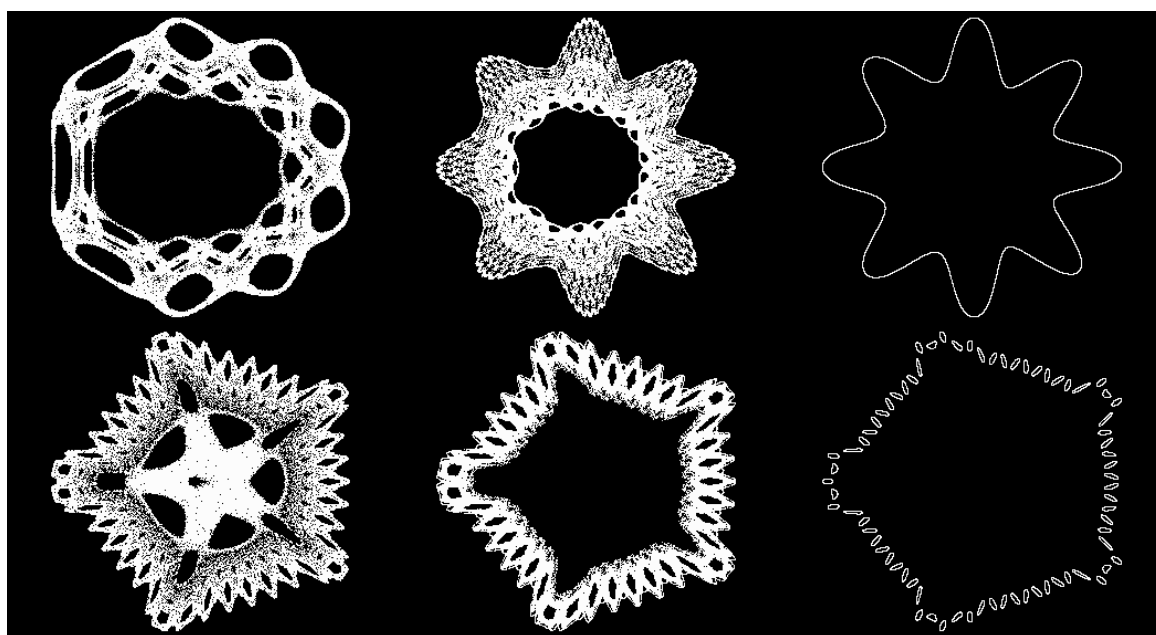
$$g(x) = \mu x + \frac{2(1-\mu)x^2}{1+x^2} \quad (4)$$

oraz $\alpha, \mu \in R$.

Przy ustalonym punkcie początkowym $[x_0, y_0]^T \in R^2$ dla różnych wartości parametrów α, μ otrzymujemy różne orbity. Podobnie, jeśli ustalimy wartości parametrów α, μ i będziemy zmieniać punkt początkowy $[x_0, y_0]^T$, to również otrzymamy różne kształty orbit. Rys. 1 przedstawia przykłady orbit uzyskanych dla różnych wartości parametrów α, μ i ustalonego $[x_0, y_0]^T$, zaś Rys. 2 przedstawia przykłady odwrotnej sytuacji (różne wartości $[x_0, y_0]^T$ i ustalone α, μ). Widzimy, że w pierwszym przypadku otrzymujemy o wiele ciekawsze kształty orbit oraz kształty te są bardziej zróżnicowane, dlatego też algorytm generowania estetycznych wzorów będzie opierać się na tym przypadku.



Rys. 1. Przykłady orbit transformacji Gumowskiego-Miry dla ustalonego punktu $[x_0, y_0]^T = [0, 0.5]^T$ i różnych wartości parametrów α, μ . Góra (od lewej): $\alpha_1 = 0.01, \mu_1 = 0.01, \alpha_2 = 0, \mu_2 = -0.7509, \alpha_3 = 0, \mu_3 = -0.31$. Dół (od lewej): $\alpha_4 = 0, \mu_4 = -0.15, \alpha_5 = 0, \mu_5 = -0.34, \alpha_6 = 0, \mu_6 = -0.4$.



Rys. 2. Przykłady orbit transformacji Gumowskiego-Miry dla ustalonych wartości parametrów $\alpha = 0, \mu = 0.71$ (górze), $\alpha = 0, \mu = 0.274$ (dół) i różnych punktów początkowych $[x_0, y_0]^T$. Góra (od lewej): $[1, 1]^T, [5, 2]^T, [10, 4]^T$. Dół (od lewej): $[1, 1]^T, [10, 4]^T, [10, 9]^T$.

3. Algorytm generowania wzorów

W proponowanym algorytmie używamy k transformacji Gumowskiego-Miry. Każdej z tych k transformacji przypisujemy prawdopodobieństwo wylosowania w procesie losowym. Wszystkie prawdopodobieństwa muszą sumować się do 1. Oprócz transformacji i prawdopodobieństw dane są

punkt startowy oraz liczba punktów, z których ma się składać wygenerowany wzór. Sam algorytm wygląda następująco:

Dane: punkt startowy $[x_0, y_0]^T$, $n \in \mathbb{N}$ - liczba iteracji, f_1, \dots, f_k - transformacje Gumowskiego-Miry, $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dla $i=1, \dots, k$ p_1, \dots, p_k - prawdopodobieństwa, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ oraz $p_i > 0$ dla $i=1, \dots, k$.

Wynik: ciąg punktów $[x_0, y_0]^T, \dots, [x_n, y_n]^T$ tworzących wzór.

1. Dla $i=1, \dots, n$

a. Wylosuj liczbę $j \in \{1, \dots, k\}$ zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa $\{p_1, \dots, p_k\}$,

b. $[x_i, y_i]^T = f_j([x_{i-1}, y_{i-1}]^T)$.

4. Algorytmy kolorowania

Algorytm z sekcji 3 generuje jedynie geometrię wzoru. Z punktu widzenia estetyki nie tylko geometria, ale również i kolor gra dużą rolę. Jeśli użyjemy złej palety kolorów lub też rozkład kolorów na wzorze będzie nieodpowiedni, to pomimo, iż kształt będzie bardzo ciekawy, może wydać się nieestetyczny. Dlatego też wprowadziliśmy również trzy algorytmy kolorowania za pomocą, których nadawane są kolory poszczególnym punktom, używając danej mapy kolorów (tablica z kolorami).

W pierwszym z algorytmów kolorowania do określania koloru punktu używamy odległości tego punktu od środka najmniejszego prostokąta otaczającego dane punkty. Algorytm wygląda następująco:

Dane: $[x_0, y_0]^T, \dots, [x_n, y_n]^T \in \mathbb{R}^2$, mapa kolorów $rgb[0..K-1]$, K - liczba kolorów, $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ - metryka.

Wynik: kolory c_0, \dots, c_n .

1. Wyznacz minimalny prostokąt ograniczający dane punkty. Niech $[x_c, y_c]^T$ oznacza jego środek, a D oznacza połowę długości przekątnej tego prostokąta.

2. Dla $i=0, \dots, n$

$$a. j = \left\lfloor (K-1) \frac{d([x_c, y_c]^T, [x_i, y_i]^T)}{D} \right\rfloor,$$

b. $c_i = rgb[j]$.

W drugim algorytmie do określenia koloru punktu zamiast odległości używamy numeru iteracji (numeru punktu), a algorytm wygląda następująco:

Dane: $[x_0, y_0]^T, \dots, [x_n, y_n]^T \in \mathbb{R}^2$, mapa kolorów $rgb[0..K-1]$, K - liczba kolorów.

Wynik: kolory c_0, \dots, c_n .

1. Dla $i = 0, \dots, n$

$$a. j = \left\lfloor (K-1) \frac{i}{n} \right\rfloor,$$

$$b. c_i = rgb[j].$$

Ostatni, trzeci algorytm to tzw. algorytm mieszany, w którym kolor punktu określa się korzystając z dwóch poprzednich algorytmów, tj. wyznaczany jest jako średnia arytmetyczna tych kolorów. Algorytm mieszany ma następującą postać:

Dane: $[x_0, y_0]^T, \dots, [x_n, y_n]^T \in \mathbb{R}^2$, mapa kolorów $rgb[0..K-1]$, K - liczba kolorów, $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ - metryka.

Wynik: kolory c_0, \dots, c_n .

3. Wyznacz minimalny prostokąt ograniczający dane punkty. Niech $[x_c, y_c]^T$ oznacza jego środek, a D oznacza połowę długości przekątnej tego prostokąta.

4. Dla $i = 0, \dots, n$

$$c. j = \left\lfloor \frac{1}{2}(K-1) \left(\frac{d([x_c, y_c]^T, [x_i, y_i]^T)}{D} + \frac{i}{n} \right) \right\rfloor,$$

$$d. c_i = rgb[j].$$

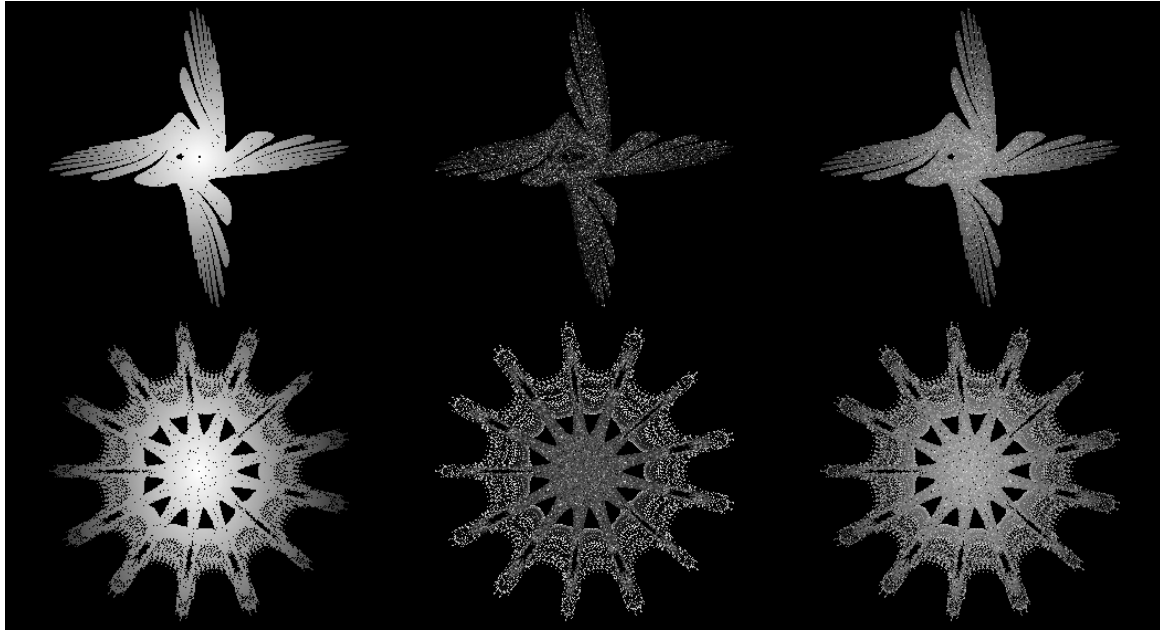
5. Przykłady

We wszystkich zaprezentowanych przykładach użyliśmy tylko jednej mapy kolorów składającej się z odcieni szarości (Rys. 3). Jest to spowodowane tym, że druk jest czarno-biały i użycie innych map kolorów nie dałoby żadnego zauważalnego efektu. Z tego też powodu nie jesteśmy w stanie zobaczyć pełni możliwości jakie dają nam zaproponowane algorytmy kolorowania.



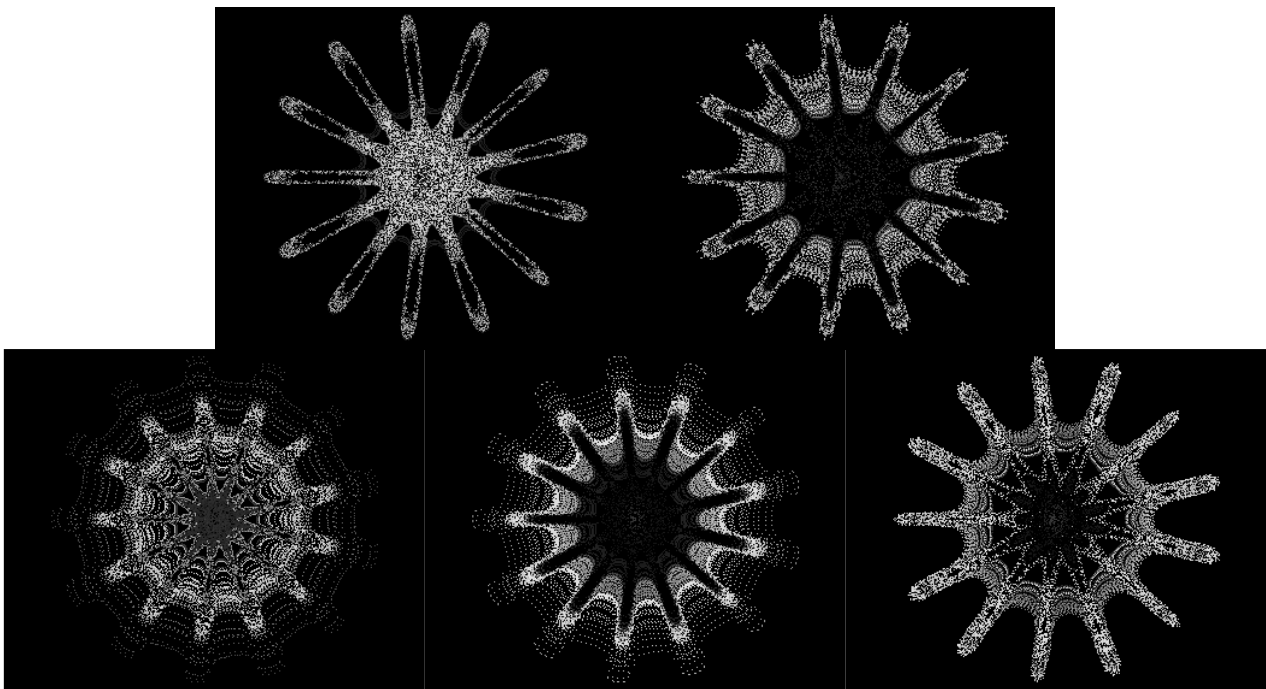
Rys. 3. Mapa kolorów użyta we wszystkich przykładach.

Zacznijmy od przykładu (Rys. 4) prezentującego użycie algorytmów kolorowania na wzorach z Rys. 1.

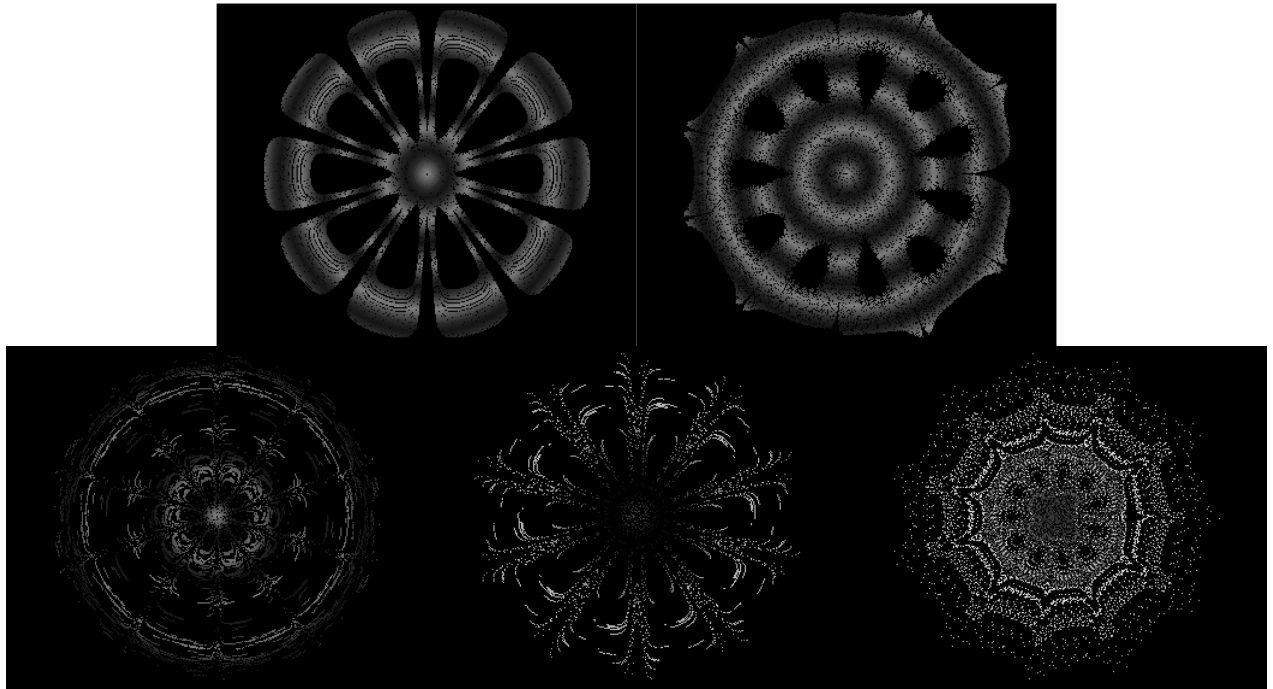


Rys. 4. Przykłady użycia algorytmów kolorowania (od lewej): z użyciem odległości, z użyciem numeru iteracji, mieszane.

Rys. 5 i 6 prezentują użycie algorytmu generowania wzorów z sekcji 3 pokolorowanych za pomocą algorytmów kolorowania z sekcji 4. Do generowania użyto dwóch transformacji Gumowskiego-Miry z różnymi wartościami prawdopodobieństw, zaś do kolorowania użyto ponownie mapy kolorów składającej się z odcieni szarości.

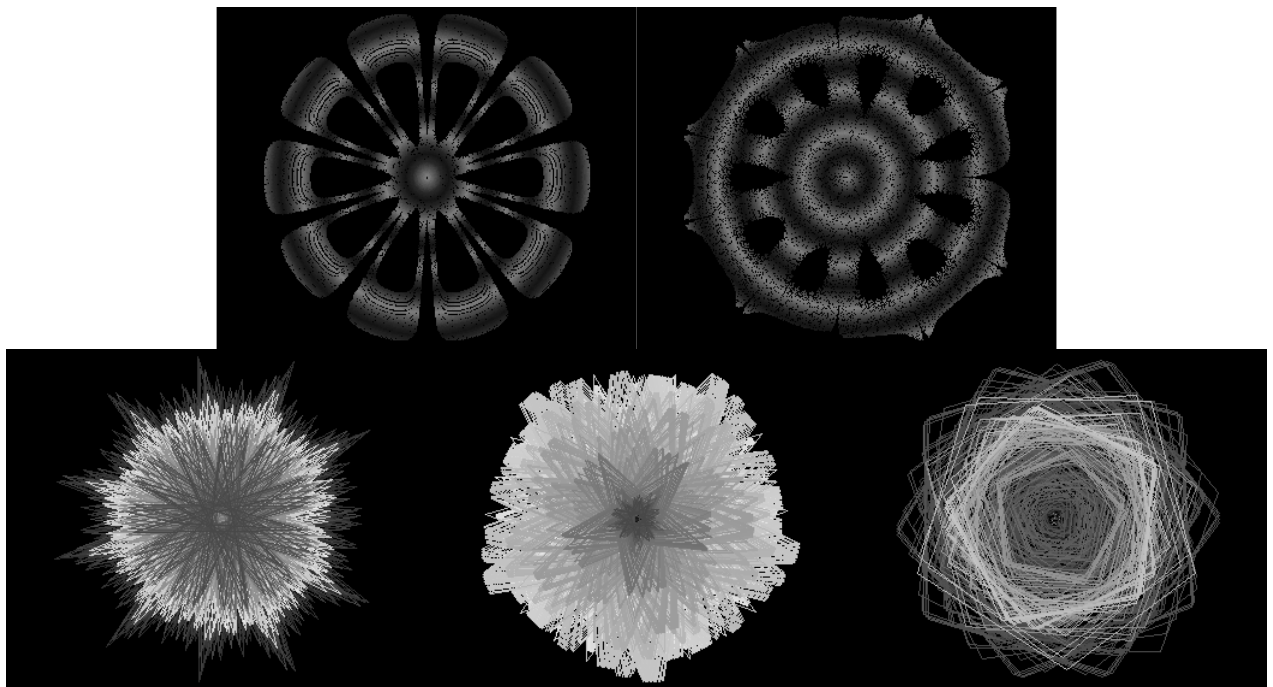


Rys. 5. Transformacje Gumowskiego-Miry użyte do generowania wzorów (góra). Wygenerowane wzory (dół).



Rys. 6. Transformacje Gumowskiego-Miry użyte do generowania wzorów (góra). Wygenerowane wzory (dół).

Po wygenerowaniu punktów wzoru nie tylko możemy wyrysować te punkty ale możemy również je połączyć za pomocą linii. Połączyć możemy kolejne punkty tworząc tym samym łamaną lub możemy łączyć punkty opuszczając niektóre z nich. Rys. 7 przedstawia przykłady wzorów powstałych przez połączenie liniami punktów wygenerowanych za pomocą algorytmu z sekcji 3.



Rys. 7. Transformacje Gumowskiego-Miry użyte do generowania wzorów (góra). Wzory otrzymane z łączenia punktów liniami (dół).

6. Wnioski i dalsze badania

W pracy przedstawiliśmy sposób w jaki można wykorzystać transformację Gumowskiego-Miry do generowania estetycznych wzorów. W odróżnieniu od metod z literatury [4],[6] zaproponowany algorytm nie używa jednej transformacji lecz ich zbioru oraz procesu losowego. Używając zaproponowanego sposobu generowania wzorów jesteśmy w stanie otrzymać całkowicie nowe, niepowtarzalne wzory. Ponadto, dodając do wygenerowanych wzorów kolor, za pomocą jednego z trzech zaproponowanych algorytmów, jesteśmy w stanie polepszyć walory estetyczne tych wzorów. Wszystkie otrzymane wzory można użyć jako wzory na tkaninach, ceramice czy też jako podstawę do wykonania biżuterii lub różnych ozdób, np. choinkowych.

W dalszych badaniach będziemy chcieli się skupić na użyciu innych układów dynamicznych, których orbity tworzą ciekawe kształty. Przykłady takich układów dynamicznych można znaleźć w [5]. Ponadto zamiast iteracji Picarda będziemy chcieli użyć bardziej ogólnych typów iteracji, np. Manna lub Ishikawa'y, które używane są do aproksymacji punktów stałych [2].

Nie wszystkie otrzymane wzory możemy uznać za estetyczne. Stąd też prowadzone będą również badania nad możliwością automatycznej oceny czy dany wzór może zostać uznany za estetyczny czy nie. Próby stworzenia takiego systemu oceny możemy znaleźć w [7],[8].

Bibliografia

- [1] Barnsley, M.: *Fractals Everywhere*. Academic Press, Boston (1988).
- [2] Berinde, V.: *Iterative Approximation of Fixed Points*. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007).
- [3] Gumowski, I., Mira, C.: *Recurrences and Discrete Dynamic Systems*. Springer-Verlag, New York (1980).
- [4] Maallem, H.B., Richard, P., Ferrier, J.-L., Labib, A.: Using Gumowski-Mira Maps for Artistic Creation. w: *Proceedings 12th Generative Art Conference*, pp. 308-315 (2009).
- [5] Morozov, A.D., Dragunov, T.N., Boykova, S.A., Malysheva, O.V.: *Invariant Sets for Windows*. World Scientific (1999).
- [6] Naud, M., Richard, P., Chapeau-Blondeau, F., Ferrier, J.L.: Automatic Generation of Aesthetic Images for Computer-assisted Virtual Fashion Design. w: *Proceedings 10th Generative Art Conference*, Milan, Italy (2007).
- [7] Pang, W., Hui, K.C.: Interactive Evolutionary 3D Fractal Modeling. *Visual Computer*, 26(12), pp. 1467-1483 (2010).
- [8] Wannarumon, S., Bohem, E.L.J.: A New Aesthetic Evolutionary Approach for Jewelry Design. *Computer-Aided Design & Applications*, 3(1-4), pp. 385-394 (2006).