

NIELINIOWE PODZIAŁY I FRAKTALE


W pracy przedstawia się uogólnienia techniki podziałów, których zastosowanie prowadzi do możliwości wygenerowania gładkich obiektów graficznych takich jak krzywe, płaty czy obiektów fraktalnych na podstawie początkowego zbioru punktów. Uogólnienia te idą w dwóch kierunkach. Pierwszy wprowadza parametr zespolony do podziału liniowego, zaś drugi nieliniowość za pomocą średnich innych niż średnia arytmetyczna. Omawiane uogólnienia podziałów w sposób istotny rozszerzają klasę obiektów graficznych, którą można wygenerować za pomocą liniowych podziałów. Podziały pozostają w ścisłym związku z metodami fraktalnymi, gdyż za ich pomocą i zadanego zbioru punktów kontrolnych definiuje się układy IFS stosowane do fraktalnego renderingu obiektów graficznych. W pracy jest również przedstawiony związek między podziałami i fraktalami. Wskazano ponadto na pewne zastosowania metody podziałów.

1. Liniowe podziały z parametrem rzeczywistym

Rozważmy odcinek o końcach P_0, P_1 . Odcinek ten dzielimy na dwa równe odcinki P_0P_1' i $P_0''P_1$, jak na rys. 1. Proces podziału można opisać za pomocą macierzy podziału L, R w następujący sposób:

$$P' = L \cdot P, \quad P'' = R \cdot P,$$

gdzie
$$P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \end{bmatrix}, \quad P'' = \begin{bmatrix} P_0'' \\ P_1'' \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P_0 = P_0' \quad P_1' = P_0'' \quad P_1 = P_1''$$


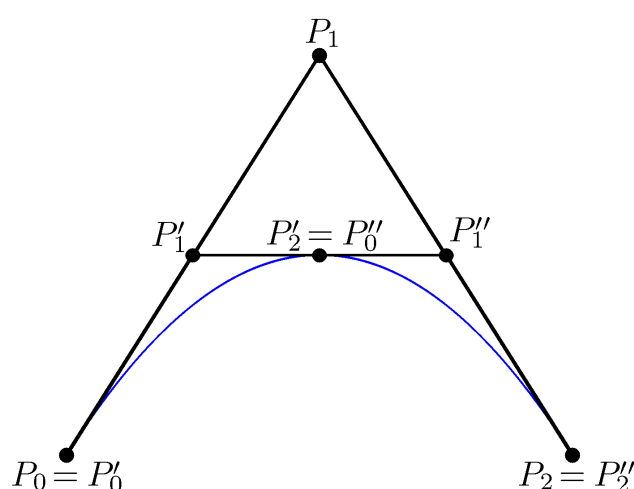
Rys. 1. Podział odcinka.

Powtarzając rekurencyjnie opisaną procedurę podziału można początkowy odcinek wypełnić w sposób gęsty punktami podziału. Podobnie, stosując procedurę podziału do trzech niewspółliniowych punktów kontrolnych P_0, P_1, P_2 , jak na rys. 2, opisaną zależnościami:

$$P' = L \cdot P, \quad P'' = R \cdot P,$$

gdzie
$$P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix}, \quad P'' = \begin{bmatrix} P_0'' \\ P_1'' \\ P_2'' \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymuje się zbiór punktów gęsto wypełniających krzywą kwadratową. Graniczna krzywa interpoluje punkty P_0 i P_2 , jest styczna do odcinków P_0P_1 , P_1P_2 , odpowiednio w punktach P_0 , P_2 . Przedstawione podziały można uogólnić na większą liczbę punktów kontrolnych. W ich wyniku otrzymuje się graniczną krzywą wielomianową. Kolejne łatwe uogólnienie podziałów, przedstawione np. w [4], prowadzi do tensorowych płatów powierzchni i objętości. W szczególności, na podstawie czterech punktów kontrolnych w przestrzeni trójwymiarowej można wygenerować za pomocą podziałów płaty dwuliniowe, dziewięciu punktów kontrolnych – płaty dwukwadratowe, szesnastu punktów kontrolnych – płaty dwukubiczne. Należy podkreślić, że macierze podziału mają szczególną własność – są macierzami Markowa tzn. ich elementy w wierszach sumują się do 1. Elementy tych macierzy, w przypadku stosowania strategii podziału „na pół” przedstawiają potęgi $\frac{1}{2}$. Parametr podziału można wiązać ze skalowaniem, gdyż podziały oparte są na relacji podobieństwa między początkowym zbiorem punktów i zbiorami punktów otrzymanych w wyniku podziałów.



Rys. 2. Podział dla krzywej kwadratowej.

2. Liniowe podziały z parametrem zespolonym

W roku 2009 Goldman w swoim wykładzie, przedstawionym na kanale You Tube w ramach Google Tech Talks [3], wprowadził do podziałów parametr zespolony. Wtedy, na płaszczyźnie zespolonej, podział odcinka o końcach P_0 , P_1 odbywa się zgodnie z macierzami podziału:

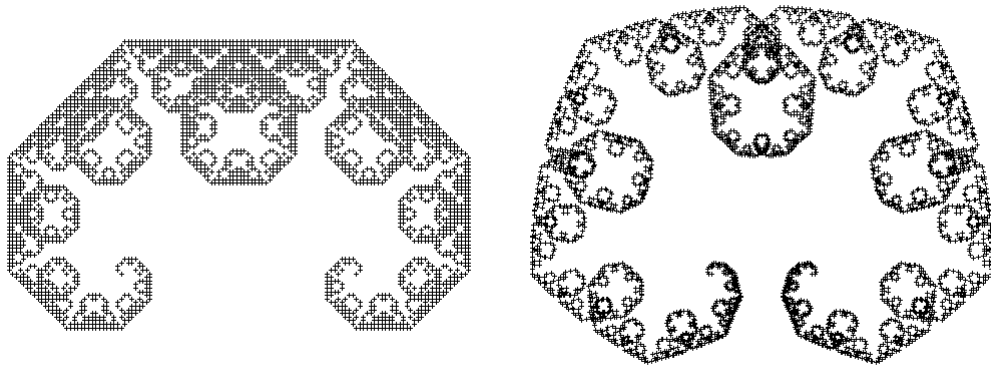
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - re^{i\varphi} & re^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 - re^{i\varphi} & re^{i\varphi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $re^{i\varphi} = x + iy$ jest liczbą zespoloną, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jej modułem, a φ jej argumentem. Parametr r jest związany ze skalowaniem, a φ z kątem obrotu.

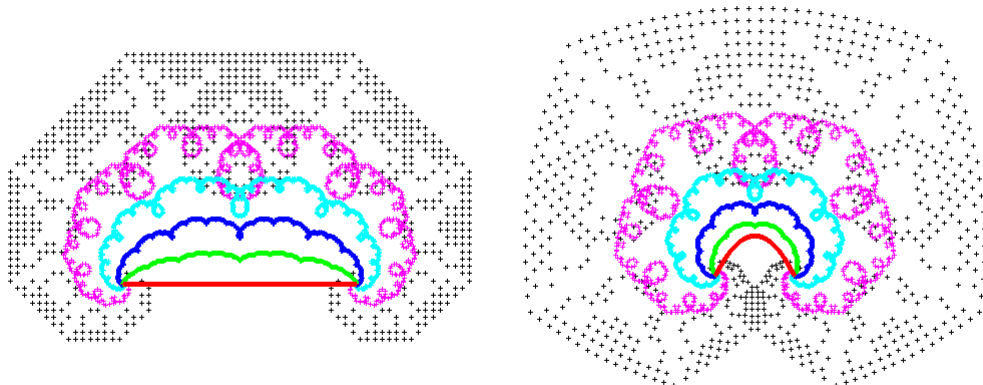
Dla trzech niewspółliniowych punktów P_0 , P_1 , P_2 na płaszczyźnie zespolonej podział opisują następujące macierze podziału:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-re^{i\varphi} & re^{i\varphi} & 0 \\ (1-re^{i\varphi})^2 & 2re^{i\varphi}(1-re^{i\varphi}) & (re^{i\varphi})^2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} (1-re^{i\varphi})^2 & 2re^{i\varphi}(1-re^{i\varphi}) & (re^{i\varphi})^2 \\ 0 & 1-re^{i\varphi} & re^{i\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na rys. 3 przedstawiono rezultaty podziałów z parametrem zespolonym dla przypadku dwóch punktów i trzech punktów. Należy podkreślić, że zbieżność podziałów zapewnia spełnienie warunku $r < 1$.



Rys. 3. Podział odcinka z parametrem zespolonym (z lewej), podział oparty na trzech punktach kontrolnych z parametrem zespolonym (z prawej). Przyjęto: parametr zespolony $0.5 + 0.5 \cdot i$, 12 iteracja podziału.

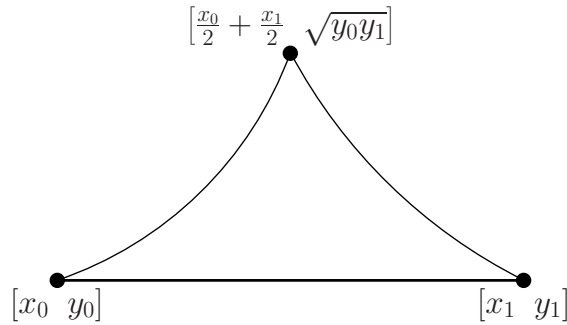


Rys. 4. Podział odcinka z parametrem zespolonym (z lewej), podział oparty na trzech punktach kontrolnych z parametrem zespolonym (z prawej). Przyjęto: parametr zespolony $0.5 + i \cdot 0.1 \cdot k$, $k = 0, \dots, 5$, 10 iteracja podziału.

Łatwo zauważyć, że wprowadzenie parametru zespolonego do podziału prowadzi do uzyskania dużej różnorodności kształtów generowanych przez podziały (rys. 4) – od odcinka czy krzywej kwadratowej, poprzez ciągłe krzywe o stopniowo zwiększającym się stopniu złożoności tych krzywych aż do kształtów fraktalnych nie będących już krzywymi. Bezpośrednie uogólnienie podziału z parametrem zespolonym do trzech wymiarów nie jest możliwe, gdyż jak wiadomo nie da się wprowadzić pojęcia analogicznego do liczby zespolonej w przestrzeni R^3 . Możliwość takiego uogólnienia dają prawdopodobnie kwaterniony.

3. Nieliniowe podziały

W 2008 roku Schaefer, Vouga i Goldman wprowadzili w [8] nieliniowość do podziałów. Zamiast średniej arytmetycznej zastosowali inne rodzaje średnich do składowej y punktów kontrolnych. W szczególności, zastosowanie średniej geometrycznej do podziału odcinka prowadzi do schematu przedstawionego na rys. 5.



Rys. 5. Nieliniowy podział odcinka z wykorzystaniem średniej geometrycznej.

Do opisu podziałów nieliniowych nie można już stosować macierzy. Podział nieliniowy ze średnią geometryczną dla dwóch punktów przyjmuje następującą postać:

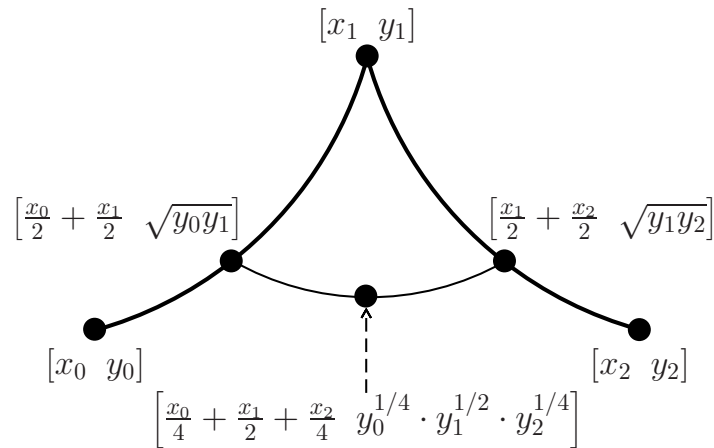
$$\begin{cases} f_1 : (x_0, y_0, x_1, y_1) \rightarrow \left(x_0, y_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, \sqrt{y_0 y_1} \right) \\ f_2 : (x_0, y_0, x_1, y_1) \rightarrow \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \sqrt{y_0 y_1}, x_1, y_1 \right) \end{cases},$$

Dla trzech punktów na płaszczyźnie, jak na rys. 6, podział nieliniowy ze średnią geometryczną jest postaci:

$$\begin{cases} f_1 : (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \left(x_0, y_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, y_0^{\frac{1}{2}} \cdot y_1^{\frac{1}{2}}, \frac{x_0 + x_1 + x_2}{4}, y_0^{\frac{1}{4}} \cdot y_1^{\frac{1}{2}} \cdot y_2^{\frac{1}{4}} \right) \\ f_2 : (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \left(\frac{x_0 + x_1 + x_2}{4}, y_0^{\frac{1}{4}} \cdot y_1^{\frac{1}{2}} \cdot y_2^{\frac{1}{4}}, \frac{x_1 + x_2}{2}, y_1^{\frac{1}{2}} \cdot y_2^{\frac{1}{2}}, x_2, y_2 \right) \end{cases}.$$

Podziały nieliniowe można traktować jako szczególne nieliniowe przekształcenia podziałów liniowych. Dla liniowego podziału podział odcinka $mx + b$ o końcach $S(x_0)$, $S(x_1)$ na pół opisuje zależność:

$$S\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = m\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + b = \frac{mx_0 + b}{2} + \frac{mx_1 + b}{2} = \frac{S(x_0) + S(x_1)}{2}.$$



Rys. 6. Nieliniowy podział dla trzech punktów z wykorzystaniem średniej geometrycznej

W przypadku zaś łuku krzywej wykładniczej, parametryzowanego jako: $\lambda x + \mu$ o końcach $F(x_0), F(x_1)$, punkt podziału spełnia następujące równanie funkcyjne:

$$F\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = e^{\lambda(x_0+x_1)/2 + \mu} = e^{(\lambda x_0 + \mu)/2} \cdot e^{(\lambda x_1 + \mu)/2} = \sqrt{F(x_0)F(x_1)},$$

którego rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza. Zastosowanie średniej geometrycznej umożliwia odtworzenie poprzez podziały krzywej wykładniczej. Różne równania funkcyjne definiują różne podziały nieliniowe za pomocą, których można odtworzyć funkcje będące rozwiązaniami tych równań. Podziały nieliniowe dają możliwość generowania, w szczególności krzywych postaci: $\sin(x), \cos(x), e^{p(x)}$ (gdzie $p(x)$ jest wielomianem), $e^{\sin(x)}, e^{\cos(x)}$, a także łuków okręgu. Rozszerzają więc one klasę krzywych otrzymywanych za pomocą podziałów liniowych. Krzywe generowane za pomocą podziałów nieliniowych są, podobnie jak w przypadku podziałów liniowych, równomiernie parametryzowane co oznacza, że podczas renderingu tych krzywych punkty podziału wypełniają generowane krzywe równomiernie i w sposób gęsty.

4. Układy IFS a podziały

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że podziały w istocie opisują rekurencyjny sposób tworzenia krzywych, płatów i innych obiektów graficznych. Sugeruje to więc istnienie związku między podziałami a fraktalami. Związek ten dla krzywych Béziera został pokazany w [2], gdzie ponadto zdefiniowano postać układu IFS dla tych krzywych. W pracach [4], [5] wspomniany związek został wykorzystany do przedstawienia metody modelowania dowolnych konturów, które mogą być reprezentowane w postaci sumy łuków krzywych kwadratowych i odcinków prostych. Okazało się, że związek między macierzami podziału a układami IFS występuje nie tylko dla krzywych Béziera, ale też dla dowolnych krzywych, dla których znane są macierze podziału [7]. Związek ten ponadto przenosi się na płaty i objętości generowane za pomocą podziałów.

W szczególności np. układ IFS dla krzywej kwadratowej ma postać:

$$IFS = \{P^{-1} \cdot L \cdot P, P^{-1} \cdot R \cdot P\},$$

gdzie L, R są macierzami podziału, P jest macierzą punktów kontrolnych, a P^{-1} macierzą odwrotną do P . Macierz punktów kontrolnych P w przypadku krzywej kwadratowej jest postaci:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla płatów układ IFS opisują cztery przekształcenia zwięzające i ma on następującą postać:

$$IFS = \{P^{-1} \cdot B_1 \cdot P, P^{-1} \cdot B_2 \cdot P, P^{-1} \cdot B_3 \cdot P, P^{-1} \cdot B_4 \cdot P\},$$

gdzie B_1, B_2, B_3, B_4 są macierzami podziału, P jest macierzą punktów kontrolnych, a P^{-1} macierzą odwrotną do P .

Okazuje się, że również w przypadku podziałów nieliniowych można dla krzywych (z nieliniowością zadawaną za pomocą różnych średnich) podać postać układu IFS [8]:

$$IFS = \{F \circ P^{-1} \cdot L \cdot P \circ F^{-1}, F \circ P^{-1} \cdot R \cdot P \circ F^{-1}\},$$

gdzie F jest funkcją nieliniową lokalnie odwracalną, F^{-1} jest funkcją odwrotną do F (np. $F(x) = e^x$, $F^{-1}(x) = \ln x$), \circ oznacza złożenie. Pozostałe oznaczenia, jak wyżej.

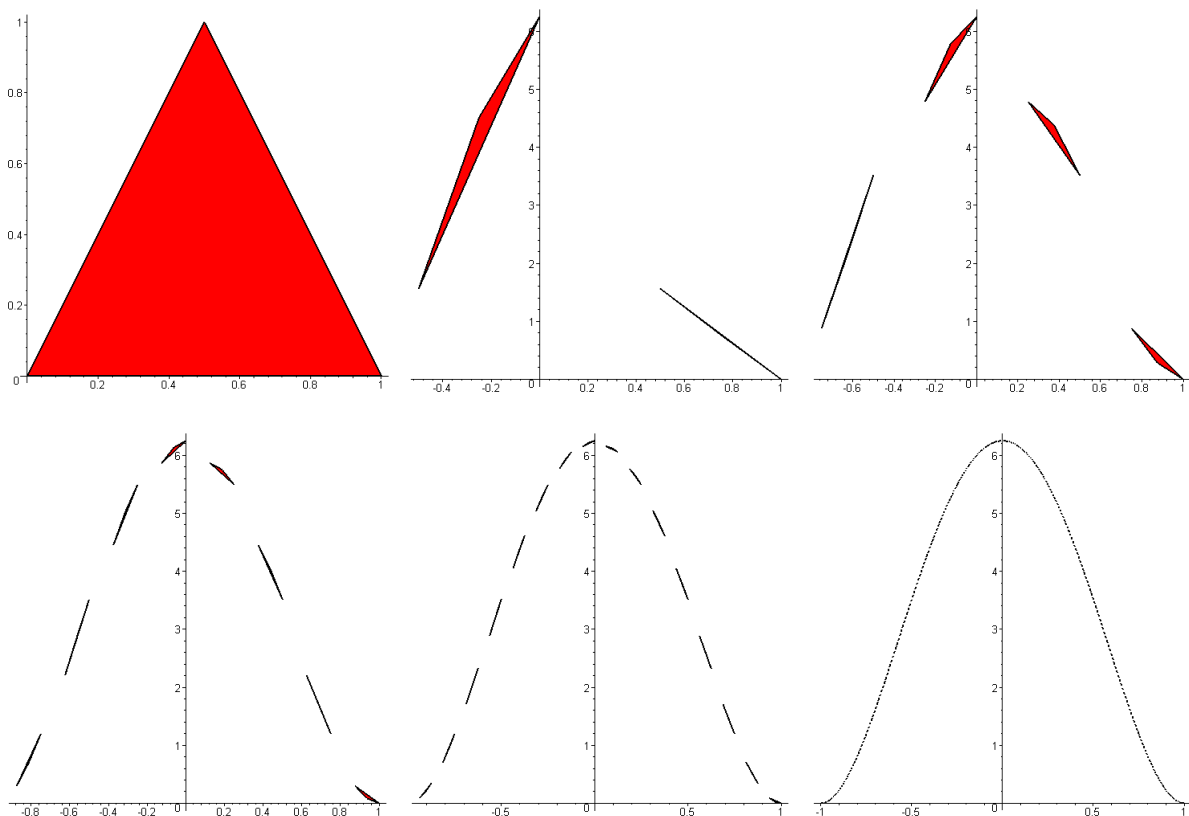
Na rys. 7 przedstawiono krzywą Gaussa wygenerowaną na podstawie układu $IFS = \{f_1, f_2\}$:

$$f_1 := \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y' = \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{y} + \frac{5}{4}\right)^2 \end{cases}, f_2 := \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y' = \left(-\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\sqrt{y} + \frac{5}{4}\right)^2 \end{cases}, P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

za pomocą algorytmu deterministycznego startując z trójkąta.

5. Zastosowania

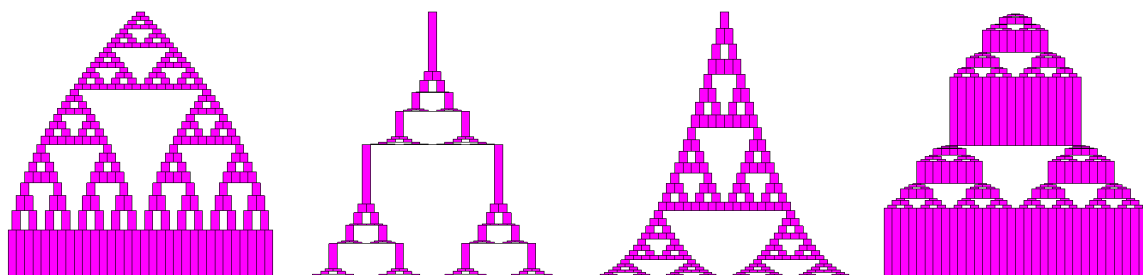
Technika podziałów (ang. subdivision) jest szeroko stosowana do modelowania obiektów graficznych. Coraz częściej, ze względu na bardzo proste i łatwe w implementacji algorytmy stanowi ona konkurencyjną alternatywę np. dla płatów Béziera. Studia filmowe, począwszy od nagrodzonej Oscarem w 1998 roku animacji komputerowej „Geri’s Game”, stosują w swoich produkcjach filmowych technikę podziałów do modelowania obiektów i scen 3D. Podziały nieliniowe umożliwiają dokładne odtworzenie poprzez podziały szerszej klasy krzywych niż tradycyjne podziały liniowe. Można więc przypuszczać, że do tych podziałów nieliniowych sięgną wkrótce producenci oprogramowania do modelowania 3D, a także studia filmowe tworzące animacje komputerowe.



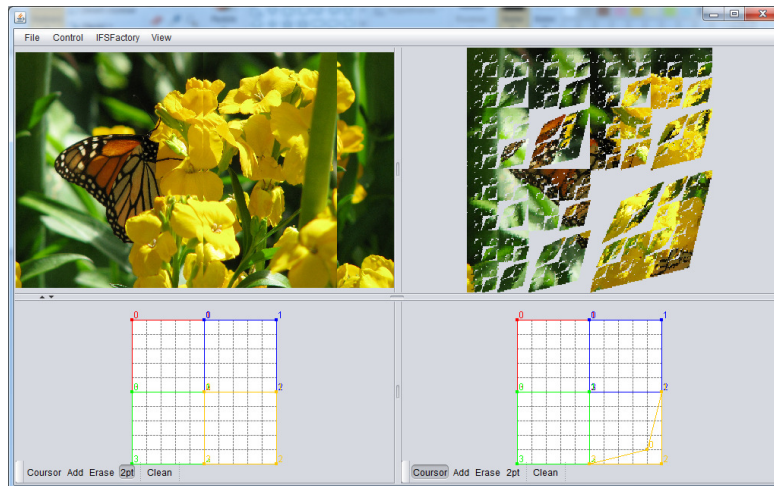
Rys. 7. Fraktalny rendering krzywej Gaussa. Iteracje:0,1,2,3,4,6.

Podziały nieliniowe, w szczególności, można wprowadzić do znanych fraktali np. trójkąta Sierpińskiego. W rezultacie otrzymuje się nowe interesujące formy fraktalne, jak na rys. 8. W tym przypadku formy te są przekształconymi trójkątami Sierpińskiego, które zostały wygenerowane za pomocą odpowiednich nieliniowych układów IFS. Podobnie, wprowadzenie podziałów nieliniowych do superfraktali, przedstawionych w [1], umożliwia wygenerowanie nowych form superfraktalnych. Innym możliwym zastosowaniem podziałów nieliniowych mogą być filtry fraktalne, za pomocą których można uzyskać przekształcenia obrazów, jak na rys. 9.

Dla wszystkich wymienionych wyżej przykładów charakterystyczną cechą jest niewielka ilość informacji zawarta w punktach kontrolnych i macierzach podziału, na podstawie których tworzy się układy IFS do generowania obiektów fraktalnych iteracyjnie i niezależnie od rozdzielczości. Cechy te są bardzo ważne przy przesyłaniu w sieci informacji do generowania fraktalnych obiektów graficznych.



Rys. 8. Nieliniowe przekształcenia trójkąta Sierpińskiego.



Rys. 9. Efekt działania filtru fraktalnego [6].

6. Uwagi końcowe i wnioski

W pracy przedstawiono opisane ostatnio w literaturze [3], [8] modyfikacje podziałów idące w dwóch kierunkach. Pierwszy z nich wprowadza do podziałów parametr zespolony, drugi zaś nieliniowość. Obie modyfikacje umożliwiają wygenerowanie za pomocą podziałów znacznie szerszej klasy obiektów graficznych niż te, które można otrzymać za pomocą znanych podziałów liniowych. Należy podkreślić związek między podziałami a fraktalami. Podziały definiują układy IFS, za pomocą których można wygenerować fraktalnie każdy obiekt graficzny, dla którego znane są macierze podziału, zarówno w przypadku liniowym jak i nieliniowym. Dualizm między podziałami i fraktalami stwarza możliwość ciągłej i przewidywalnej zmiany kształtu fraktala za pomocą wprowadzonych do niego punktów kontrolnych, podobnie jak np. dla krzywych czy płatów Béziera, które łatwo można modyfikować za pomocą punktów kontrolnych.

Autorzy pracy widzą możliwości zastosowania podziałów nieliniowych i podziałów z parametrem zespolonym do superfraktali oraz innych algorytmów fraktalnych opisanych w monografii Barnsleya [1] takich jak algorytm transferu barw, przekształcenia homeomorficzne obrazów za pomocą filtrów fraktalnych. Wymienione zagadnienia będą przedmiotem dalszych badań.

Bibliografia

- [1] Barnsley M., Superfractals, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [2] Goldman R., The Fractal Nature of Bézier Curves, Proceedings of the Geometric Modeling and Processing, April 13-15, Beijing, China, 2004, pp.3-11.
- [3] Goldman R., The Marriage of Fractals and Splines: Fractals with Control Points, Splines as Attractors, Google Tech Talks, 15 czerwiec 2009.
- [4] Kotarski W., Fraktalne modelowanie kształtu, Wydawnictwo EXIT, Warszawa 2008. Kotarski W., Lisowska A., On Bézier-Fractal Modeling of 2D Shapes, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 24, No. 1, 123-134, 2005.
- [6] Pyplacz K., Fraktalne modelowanie krajobrazów, praca magisterka, Instytut Informatyki, Uniwersytet Śląski, Sosnowiec 2009.
- [7] Schaefer S., Levin D., Goldman R., Subdivision Schemas and Attractors, Eurographics Symposium on Geometry Processing, 171-180, 2005.
- [8] Schaefer S., Vouga E., Goldman R.: Nonlinear subdivision through nonlinear averaging, Computer Aided Geometric Design, Vol. 25, Issue 3, March 2008, 162-180.