

Proste i odwrotne schematy podziału

Wiesław KOTARSKI^{*}, Krzysztof GDAWIEC^{**}

^{*} Instytut Informatyki Uniwersytetu Śląskiego

^{**} Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

1. Wstęp

W 1974 roku Chaikin [2] przedstawił bardzo prosty algorytm, w którym przez kolejne ścinanie rogów wieloboku można otrzymać graniczną krzywą gładką. Podobny algorytm w literaturze pojawił się już wcześniej. W 1947 roku algorytm ścinania rogów badał de Rham [8]. Algorytm Chaikina następnie został uogólniony na płaty powierzchni przez Catmulla i Clarka oraz Doo i Sabina w 1978 roku oraz przez Loopa [4] w 1987 roku. Wcześniej, w latach 60-tych XX wieku, Bézier i de Casteljau odkryli krzywe i płaty powierzchni, których kształt można zmieniać w sposób intuicyjny za pomocą niewielkiej liczby punktów kontrolnych. Metody podziału (ang. subdivision) ogólnie można opisać za pomocą tzw. schematów podziału, które mogą być reprezentowane w postaci macierzowej. Macierze podziału odznaczają się szczególną własnością – są macierzami Markowa, co oznacza że sumy elementów ich wierszy są równe 1. Na podstawie spektrum wartości własnych macierzy podziału można stwierdzić gładkość krzywych, bądź płatów generowanych za ich pomocą. Sposób tworzenia krzywych i płatów za pomocą podziału ściśle wiąże się z fraktalnym generowaniem kształtów. Można bowiem na podstawie schematów podziału zbudować układ IFS (ang. Iterated Function System) definiujący fraktala. W 2004 roku Goldman [3] podał wzór definiujący układ IFS za pomocą macierzy podziału, który służy do wygenerowania w sposób fraktalny krzywych Béziera. Następnie Schaefer, Goldman i Levin [11] w 2005 roku opublikowali pracę, w której pokazali sposób budowy układu IFS dla dowolnych schematów podziału zarówno dla krzywych, jak i płatów powierzchni. Opierając się na tych wynikach pierwszy autor artykułu w monografii [6] przedstawił metodologię generowania w sposób fraktalny dowolnych kształtów dwu- lub trójwymiarowych. Schematy podziału i metody fraktalne są zatem ze sobą ściśle powiązane. Pozwalają nawet wprowadzić do fraktali punkty kontrolne, za pomocą których można płynnie zmieniać kształt fraktala. Przez zmianę parametrów w schematach podziału można uzyskiwać kształty gładkie bądź kształty fraktalne. Takie przykłady pokazał w 1990 roku Overweld w pracy [7]. Zaburzając macierze podziału otrzymywał kubiczne krzywe Béziera bądź krzywe fraktalne. Z powyższych informacji wynika, iż generowanie krzywych bądź płatów za pomocą podziału łączy w sobie zarówno cechy fraktali jak i krzywych, których kształt zmieniany może być za pomocą punktów kontrolnych. Warto podkreślić, iż kształty tworzone metodami fraktalnymi są niezależne od rozdzielczości i są otrzymywane w oparciu o niewielką liczbę współczynników układów IFS.

Na schematy podziału można także spojrzeć jak na aproksymacje operatorów różniczkowych. Takie podejście, uogólniające klasyczne schematy podziału, przedstawili Warren i Weimer w [12] i [13]. Oznacza to, że rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego, bądź cząstkowego przedstawia pewien kształt, który często można otrzymać za pomocą odpowiednich schematów podziału, które w istocie można uważać za równoważne numerycznemu sposobowi rozwiązania tych równań. Rzeczywiście, na przykład splajny kubiczne są rozwiązaniami pewnych równań różniczkowych, które z kolei minimalizują całkowite wskaźniki jakości. Splajny kubiczne bowiem charakteryzują

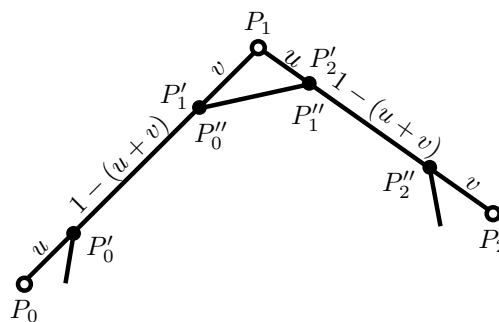
się minimalnym poziomem energii deformacji, co oznacza, że cała reprezentująca tę energię przyjmuje minimum. Całka energii osiąga minimum dla funkcji będących rozwiązaniami tzw. równania Eulera-Lagrange'a. Takie ogólniejsze spojrzenie na schematy podziału pozwala, opierając się na metodach wariacyjnych, definiować nowe schematy podziału o szczególnych własnościach. Możliwe jest więc wygenerowanie w sposób fraktalny kształtów będących rozwiązaniami równań różniczkowych, bo skoro do ich otrzymania można użyć schematu podziału, to rezultaty Goldmana [3] pozwalają już zdefiniować odpowiednie układy IFS do fraktalnego generowania tych kształtów. Stąd wniosek, że np. znane powierzchnie minimalne otrzymywane jako kształty podobne do baniek mydlanych powinny być możliwe do wygenerowania w sposób fraktalny.

Schematy podziału, jak wiadomo, często prowadzą do gładkich krzywych bądź gładkich płatów. Powstaje więc naturalne pytanie czy schematy podziału można odwrócić tzn. czy na podstawie gładkiej krzywej bądź płata można otrzymać wielobok czy siatkę początkową, z której poprzez podziały można uzyskać kształt wyjściowy. Pozytywną odpowiedź na to pytania przedstawił w roku 1999 Bartels i Samavati [1], [9]. Odwrotne schematy podziału prowadzą do tzw. wielorozdzielczych reprezentacji kształtów, co oznacza że dany kształt może być przedstawiony dokładniej z większą liczbą szczegółów, bądź mniej dokładnie ze zredukowaną liczbą szczegółów. Wielorozdzielcze reprezentacje są interesujące z praktycznego punktu widzenia.

Metody podziału, metody fraktalne a także odwrotne metody podziału, które wiele łączy, jak można zorientować się po bogatej literaturze przedmiotu, w ostatnich latach cieszą się dużym zainteresowaniem matematyków i informatyków.

2. Schematy podziału dla krzywych i płatów

Rozważmy na płaszczyźnie punkty kontrolne P_0, P_1, P_2 tworzące łamaną, jak na rys.1. Algorytm ścinania rogów działa następująco: odcinki $[P_0, P_1]$ i $[P_1, P_2]$ dzielimy odpowiednio w proporcjach $u : 1 - (u + v) : v$, gdzie $u, v \geq 0$ oraz $0 < u + v \leq 1$. W wyniku podziału powstają nowe punkty P'_0, P'_1, P'_2 tworzące odpowiednio lewą część i punkty P''_0, P''_1, P''_2 tworzące prawą część nowej łamanej.



Rys.1. Schemat podziału dla krzywej.

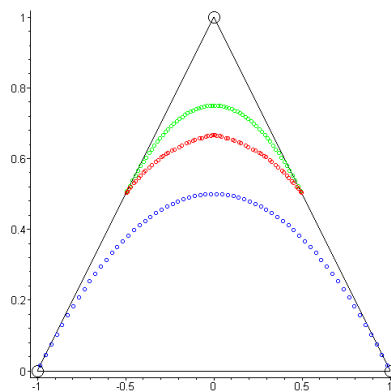
Związki między początkowymi punktami i punktami lewej i prawej części powstałymi w wyniku podziału opisują zależności:

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_0'' \\ P_1'' \\ P_2'' \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } L = \begin{bmatrix} 1-u & u & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 1-u & u \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} v & 1-v & 0 \\ 0 & 1-u & u \\ 0 & v & 1-v \end{bmatrix}$$

są tzw. macierzami podziału, z parametrami spełniającymi warunki:

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad 0 < u+v \leq 1.$$

Kolejne podziały opisują iteracje macierzy L i R . Graniczny kształt zależy od wartości parametrów u i v , które wpływają na wartości własne macierzy podziału. W szczególności, jeśli $u = v = 1/3$ to macierze podziału mają wartości własne $1, 1/3, 1/3$ i graniczna krzywa jest tylko ciągła. Przypadek ten analizował de Rham w 1947 roku. Gdy $u = v = 1/4$ to macierze podziału mają wartości własne $1, 1/2, 1/4$ i graniczny kształt jest gładki. Przypadek ten odpowiada algorytmowi przedstawionemu przez Chaikina w 1974 roku. Trzeci przypadek $u = v = 1/2$, w którym wartości własne też są równe $1, 1/2, 1/4$ prowadzi do kwadratowej krzywej Béziera. Analizowane przypadki granicznych krzywych zostały przedstawione na rys. 2.



Rys. 2. Krzywa górną, to krzywa Chaikina, środkową, to krzywa de Rhama, dolną, to krzywa Béziera.

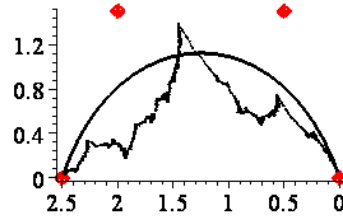
Macierze podziału dla kubicznej krzywej Béziera mają postać:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli współczynniki tych macierzy zostaną zaburzone, jak niżej

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.74 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.08 & 0.42 & 0.51 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.42 & 0.51 & 0.09 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.26 & 0.74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

to wówczas zamiast kubicznej krzywej Béziera otrzymuje się krzywą fraktalną, jak na rys.3.



Rys. 3. Kubiczna krzywa Béziera oraz krzywa fraktalna oparte na tych samych punktach kontrolnych.

Jak widać, obie krzywe: kubiczna krzywa Béziera oraz krzywa fraktalna powstały w oparciu o schematy podziału z różnymi macierzami L i R . W tym miejscu widoczne jest to, że krzywe generowane na podstawie schematów podziału wyznaczają bardzo szeroką klasę krzywych, do której należą zarówno krzywe gładkie, jak również krzywe fraktalne. Rezultat ten wzbogacony został o wynik Goldmana [3], który wskazał postać układu IFS do wygenerowania krzywej Béziera:

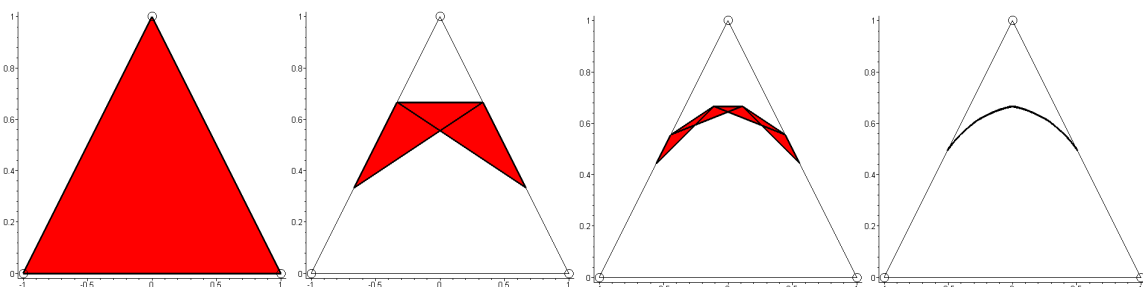
$$IFS = \{P^{-1} \cdot L \cdot P, P^{-1} \cdot R \cdot P\},$$

gdzie P jest nieosobliwą macierzą punktów kontrolnych, P^{-1} jest macierzą odwrotną do P . W przypadku kwadratowej krzywej Béziera macierz P tworzą współrzędne punktów kontrolnych w postaci jednorodnej:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast w przypadku krzywych wyższych stopni macierz P złożona z punktów kontrolnych musi być uzupełniona dowolnymi elementami do nieosobliwej macierzy kwadratowej.

Na rys. 4 przedstawiono kolejne iteracje tworzenia w sposób fraktalny krzywej de Rhama.



Rys. 4. Krzywa de Rhama generowana fraktalnie za pomocą algorytmu deterministycznego.

Wyniki przedstawione w rozdziale mogą być w sposób bezpośredni uogólnione na płaty powierzchni będące iloczynami tensorowymi krzywych. W przypadku płatów powierzchni zamiast dwóch macierzy podziału wystąpią cztery następujące macierze:

$$B_1 = L \otimes L, \quad B_2 = L \otimes R, \quad B_3 = R \otimes L, \quad B_4 = R \otimes R,$$

gdzie symbol \otimes oznacza iloczyn tensorowy macierzy podziału dla krzywych. W przypadku płata dwukwadratowego macierze podziału mają wymiary 9×9 , a w przypadku płata dwukubicznego już 16×16 . Wzór Goldmana na układ IFS do fraktalnego generowania płata przyjmuje postać:

$$IFS = \{P^{-1} \cdot B_1 \cdot P, P^{-1} \cdot B_2 \cdot P, P^{-1} \cdot B_3 \cdot P, P^{-1} \cdot B_4 \cdot P\},$$

gdzie B_1, B_2, B_3, B_4 , to macierze podziału dla płata, P to nieosobliwa macierz kwadratowa punktów kontrolnych płata, a P^{-1} to macierz odwrotna do P .

Również dla płata, spektrum wartości własnych macierzy podziału daje informację odnośnie gładkości płata wygenerowanego za pomocą macierzy podziału. I tak, dla płata będącego iloczynem tensorowym krzywych Chaikina wartości własne macierzy podziału są następujące:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}.$$

Natomiast dla płata zbudowanego jako iloczyn tensorowy krzywych de Rhama wartości własne są następujące:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}.$$

3. Schematy podziału a równania różniczkowe

Z rachunku wariacyjnego [12] znany jest fakt, iż funkcja $y(x)$ spełniająca warunki brzegowe i minimalizująca całkę:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego Eulera-Lagrange'a:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Całka ta zazwyczaj reprezentuje energię pewnego układu, natomiast rozwiązanie równania Eulera-Lagrange'a opisuje własności dynamiczne tego układu. W szczególności następująca całka:

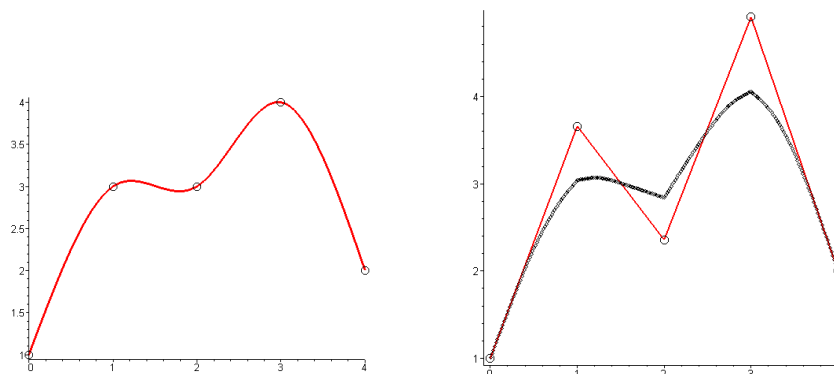
$$\int_{t_0}^{t_m} \left(\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt \rightarrow \min,$$

$$F(t_i) = v_i, \quad T = \{t_0, \dots, t_m\},$$

reprezentuje energię deformacji odkształconej krzywej przechodzącej przez zadane punkty. Minimum energii tej krzywej osiągane jest dla funkcji spełniającej następujące równanie Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\partial^4 F(t)}{\partial t^4} = 0, \quad \forall t \notin T.$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe rzędu czwartego. Jego rozwiązaniem jest naturalny splajn kubiczny tzn. krzywa interpolacyjna składająca się z kawałków krzywej wielomianowej trzeciego stopnia. W szczególnym przypadku, gdy $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $v = \{1, 3, 3, 4, 2\}$ krzywa przedstawiona w lewej części rys. 5 jest krzywą o minimalnej energii deformacji.



Rys. 5. Z lewej – naturalny splajn kubiczny o minimalnej energii deformacji, z prawej – B-splajn kubiczny otrzymany w oparciu o macierze podziału.

Naturalny splajn kubiczny może być wygenerowany, jako B-splajn kubiczny (prawa część rys. 5) za pomocą następujących macierzy podziału:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

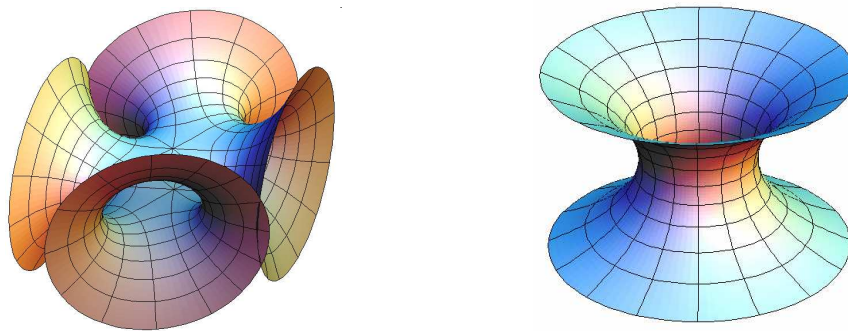
oraz wieloboku początkowego zbudowanego na następujących punktach kontrolnych: $[0, 1]$, $[1, 205/56]$, $[2, 33/14]$, $[3, 275/56]$, $[4, 2]$, które oblicza się z zależności:

$$p = C^{-1} \cdot v,$$

gdzie p , to punkty kontrolne B-splajna kubicznego, v , to węzły interpolacji dla naturalnego splajna kubicznego, a C jest macierzą o postaci:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opierając się na monografii Warrena i Weimera [13] można próbować w sposób fraktalny wygenerować także np. płaty o minimalnej powierzchni, jak na rys. 6.

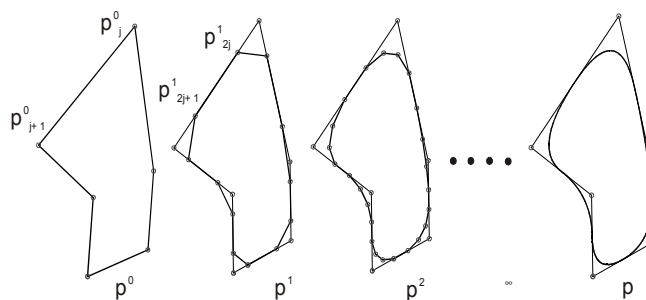


Rys. 6. Przykładowe płaty o minimalnej powierzchni.

Płaty te odznaczają się, podobnie jak splajny kubiczne, własnościami ekstremalnymi – minimalizują energię, co przekłada się na fakt, że spełniają one odpowiednie równania Eulera-Lagrange’a. Rozwiązania tych równań z kolei mogą być otrzymane za pomocą odpowiednich schematów podziału.

4. Odwrotne schematy podziału dla krzywych i płatów

Rozważmy schemat podziału Chaikina zastosowany dla $n > 3$ punktów tworzących wielobok, jak na rys. 7.



Rys.7. Algorytm ścinania rogów Chaikina.

Kolejno każdy bok wieloboku dzielony jest na trzy części w proporcji $1/4 : 1/2 : 1/4$. W miejscach podziału umieszczone zostają dwa nowe punkty i ucinane są rogi. Powstaje w ten sposób wielobok o większej liczbie boków i z iteracji na iterację tworzy się coraz gładszy kontur dając graniczną krzywą p^∞ . Proces podziału można opisać za pomocą macierzy dwuprzekątniowej mającej w wierszach elementy $1/4, 3/4$ lub równoważnie za pomocą następującej zależności rekurencyjnej:

$$\begin{cases} p_{2j}^{k+1} = \frac{3}{4}p_j^k + \frac{1}{4}p_j^{k+1}, \\ p_{2j+1}^{k+1} = \frac{1}{4}p_j^k + \frac{3}{4}p_j^{k+1}, \end{cases}$$

gdzie k oznacza numer podziału, a j numer punktu. Z układu tego można wyliczyć:

$$p_j^k = \frac{3}{2}p_{2j-1}^{k+1} - \frac{1}{2}p_{2j}^{k+1}.$$

Punkt p_j^k może być również wyliczony na podstawie innej pary punktów:

$$p_j^k = \frac{3}{2}p_{2j-2}^{k+1} - \frac{1}{2}p_{2j-3}^{k+1}.$$

Po uśrednieniu otrzymuje się:

$$p_j^k = -\frac{1}{4}p_{2j-3}^{k+1} + \frac{3}{4}p_{2j-2}^{k+1} + \frac{3}{4}p_{2j-1}^{k+1} - \frac{1}{4}p_{2j}^{k+1}.$$

Stąd widać, że możliwe jest znalezienie przybliżonej zależności pomiędzy punktami niższego poziomu a punktami poziomu wyższego. Oznacza to, że możliwe jest odwrócenie schematu podziału Chaikina. Na rys. 8 przedstawiono działanie schematu podziału wprost, a na rys. 9 działanie odwrotnego schematu Chaikina.



Rys. 8. Schemat podziału Chaikina wprost.



Rys. 9. Odwrócony schemat podziału Chaikina.

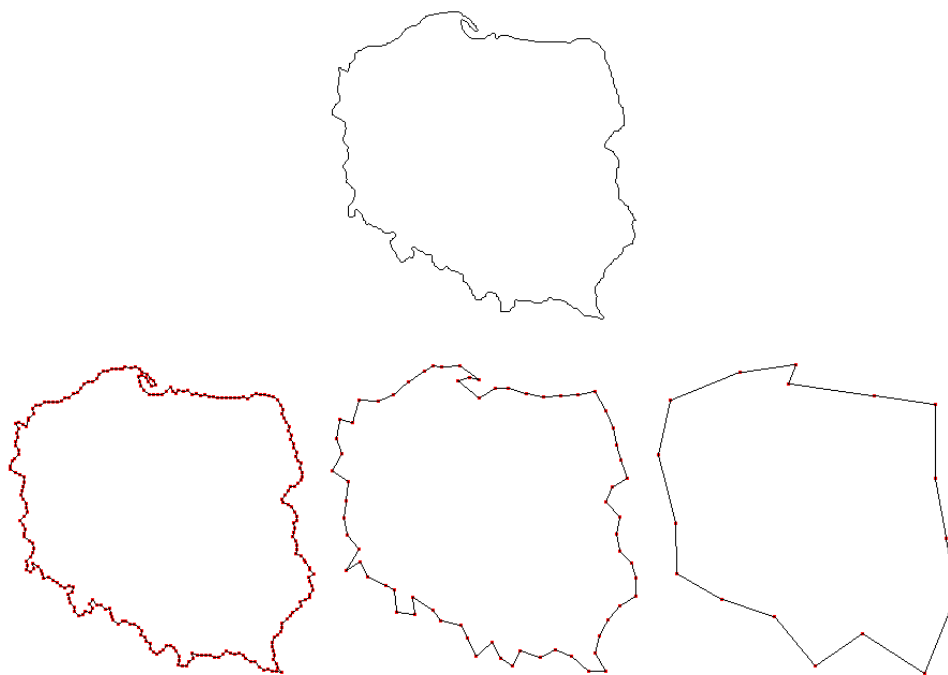
W podobny sposób udaje się odwrócić działanie innych schematów podziału dla krzywych jak np. schematu dla kubicznych krzywych Béziera, czy schematu czteropunktowego. Także odwracalne są schematy podziału dla płatów, jak np. schematu Doo [10], Loopa czy

Catmulla-Clarka. Odwrócenie schematów podziału umożliwia wielorozdzielczą reprezentację kształtów.

5. Zastosowanie prostych i odwrotnych schematów podziału

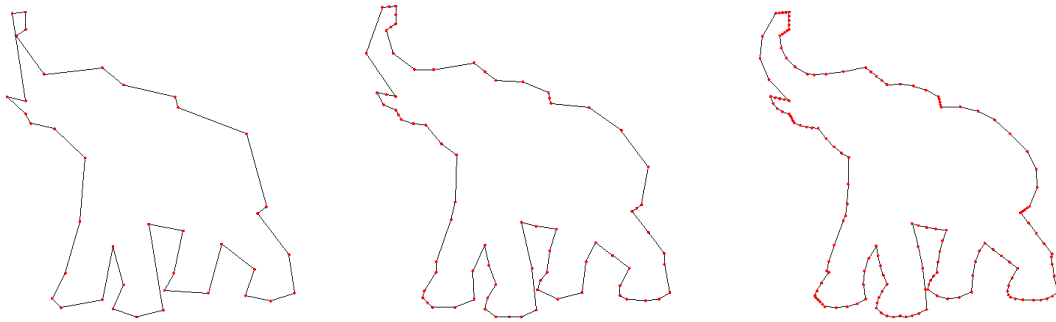
Schematy podziału wprost dają możliwość generowania dowolnych kształtów na podstawie wieloboków czy siatek w procesie ścinania rogów. Otrzymywane kształty odznaczać się mogą dowolną złożonością. Kształty tworzone w ten sposób są gładkie, co jest ważnym wymaganiem przy modelowaniu geometrycznym obiektów. Algorytmy oparte o schematy podziału są łatwe w implementacjach. Są przy tym efektywne. Te zalety zdecydowały o tym, że metody podziału znalazły zastosowanie w studiach filmowych przy tworzeniu animacji komputerowych. W szczególności, studio filmowe Pixar [14] po raz pierwszy użyło tej techniki przy realizacji 3.5 min animacji komputerowej „Geri’s Game”, nagrodzonej Oscarem w 1997 roku. Ponadto, te techniki zaimplementowane są w programach graficznych do modelowania kształtów trójwymiarowych np. POV Ray, Maya.

Odwrócenie schematu podziału może być wykorzystane do wielorozdzielczej reprezentacji konturów. Na rys. 10 pokazano za pracą [5] możliwość redukcji liczby punktów opisującej kontur na przykładzie konturu Polski.



Rys. 10. Kontur Polski przedstawiony za pomocą różnej liczby punktów (góra – 1074, dół od lewej – 269, 68, 17).

Podobnie, redukcję liczby punktów konturu można uzyskać stosując metodę fraktalną. Na rys. 11 kontur słonia został wygenerowany na podstawie znajomości zbioru 39 układów IFS reprezentujących ten kontur. Jak widać obie metody - metoda odwracania schematu Chaikina i metoda fraktalna prowadzą do wielorozdzielczego opisu konturu.



Rys. 11. Kontur słonia wygenerowany na podstawie metody fraktalnej z odpowiednio 39, 78 i 156 punktami.

6. Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono metodę podziału szeroko stosowaną do generowania obiektów graficznych zarówno dwu- jak i trójwymiarowych. Pokazano związek metody podziału z algorytmami fraktalnymi oraz z zadaniami rachunku wariacyjnego. Dzięki temu związkowi możliwe jest wygenerowanie wielu kształtów za pomocą metod podziału. Ponadto, wskazano na możliwość odwrócenia schematów podziału. Jak widać zagadnienia podziału, podziału odwrotnego i metody fraktalne pozostają w ścisłym związku. Równocześnie pozwalają one uzyskać reprezentację wielorozdzielczą obiektów graficznych. Zagadnienia przedstawione w pracy dotyczyły głównie kształtów dwuwymiarowych. Autorzy prowadzą dalsze badania nad metodami podziału wprost, metodami odwrotnymi, metodami fraktalnymi oraz reprezentacją wielorozdzielczą obiektów w trzech wymiarach.

7. Literatura

- [1] Bartels R. H., Samavati F. F.: Reversing subdivision rules: local linear conditions and observations on inner products. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 119, 29-67, 2000.
- [2] Chaikin G.: An Algorithm for High Speed Curve Generation, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 3, 346-349, 1974.
- [3] Goldman R.: The Fractal Nature of Bézier Curves, *Proceedings of the Geometric Modeling and Processing*, April 13-15, Beijing, China, 2004, pp.3-11.
- [4] Farin G.: *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*, Academic Press 2002.
- [5] Holeksa S.: *Wielorozdzielcza reprezentacja konturu za pomocą odwrotnych schematów podziału*, praca magisterska, Instytut Informatyki UŚ, Sosnowiec, 2008.
- [6] Kotarski W.: *Fraktalne modelowanie kształtu*, Wydawnictwo EXIT, Warszawa, 2008.
- [7] Overveld C.W.A.M. van: Family of Recursively Defined Curves Related to the cubic Bézier Curve, *Computer Aided Design*, Vol. 22, No. 9, 591-597, 1990.
- [8] de Rham G.: Un peu de mathématique a propos d'une courbe plane, *Elem. Math.*, 2, 73-76; 89-97, 1947.

- [9] Samavati F.F., Amiri N. M., Bartels R. H. : Multiresolution Representation of Surface with Arbitrary Topology by Reversing Doo Subdivision, Computer Graphic Forum, Vol.21, No.2, 121-136, 2002.
- [10] Samavati F.F., Bartels R. H.: Multiresolution Curve and Surface Representation by Reversing Subdivision Rules by Least-Squares Data Fitting, Computer Graphics Forum, Vol. 18, No. 2, 97-120, 1999.
- [11] Schaefer S., Levin D., Goldman R.: Subdivision Schemes and Attractors, Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2005, pp. 171-180.
- [12] Warren, J. and Weimer, H.: Subdivision schemes for variational splines. Rice University, Department of Computer Science Technical Report, CS-TR 00-354, dostępe online: <http://cs-tr.cs.rice.edu/>, 2000.
- [13] Warren J., Weimer H.: Subdivision Methods for Geometric Design. Morgan Kaufmann Publishers, 2002.
- [14] Zorin D., Schroder P.: Subdivision for Modeling and Animation, ACM Computer Graphics, Course Notes, 2000.